(2)

Del M-2.14 al M-4.14

MODELOS CORPÓREOS



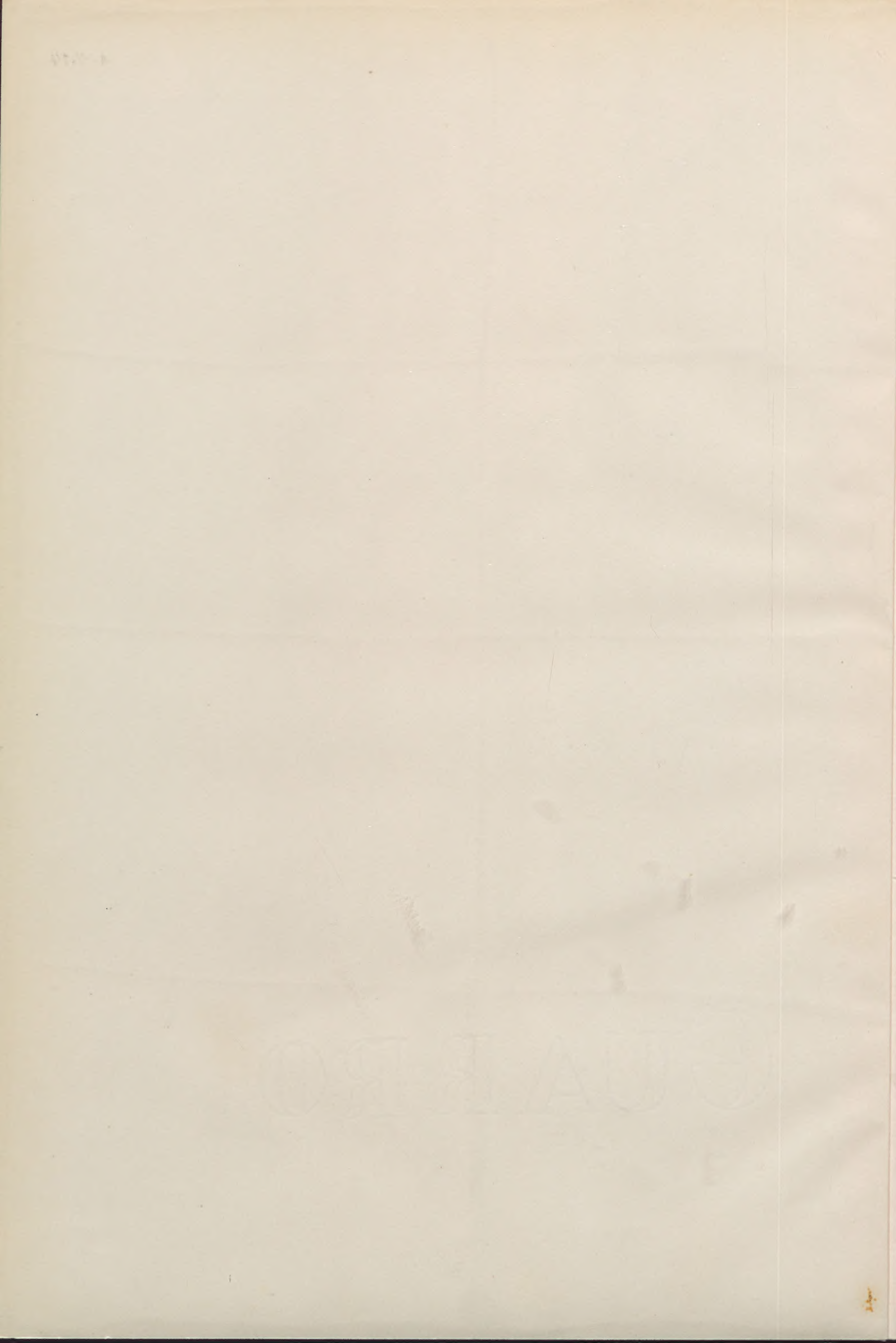
MODELOS CORPÓREOS | Modelo M-2.14

EJECUTADO

POLIEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M-2.6, EN EL CUAL ESTÁN INSCRITOS UN EXAEDRO REGULAR Y UN OCTAEDRO REGULAR, AMBOS CONVEXOS Y CONJUGADOS POR SUS ARISTAS.

Radio de la esfera circunscrita

r' = 110 mm



	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.14

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares iguales, estudiado en el modelo M-2,7, dentro del cual están inscritos un exaedro y un octaedro, ambos regulares, convexos, y conjugados por sus aristas, estando todos sus vértices en la misma esfera que circunscribe al mencionado poliedro de caras triangulares iguales.

En el estudio del modelo M-2.7 obtuvimos un poliedro convexo de veinticuatro caras triangulares iguales, obtenido al unir los nudos de la red esférica tipo b) del modelo M-2.4, al transformarse los lados de los triángulos esféricos de dicha red, en triángulos rectilíneos cuyos lados eran las cuerdas de los arcos de círculo máximo que formaban los lados de la red.

Los nudos de la red esférica generadora los clasificamos en tres clases distintas: Ocho, de clase a), vértices de un cubo; Seis de clase b), vértices de un octaedro regular convexo, inscrito en la esfera; y Doce de clase c), vértices de un Arquimediano III, también inscrito en la misma esfera.

El modelo M-2.14 que estudiamos ahora, está formado por un exaedro y un octaedro regulares convexos, conjugados por sus aristas, con caras macizas situados ambos en el interior del poliedro modelo M-2,8 de caras vaciadas

Los tres poliedros descritos anteriormente (el de 24 caras triangulares y vaciadas, y el exaedro regular convexo y otaedro regular convexo, conjugados por sus aristas, ambos de caras macizas) tienen común su esfera circunscrita. Los vértices del exaedro regular son coincidentes con los nudos de la red esférica generadora, de clase a) del modelo M-2.6. Los vértices del octaedro regular convexo son coincidentes con los nudos de la red esférica, clase b) del mencionado modelo M-2.6.

Las aristas del exaedro y otaedro regulares, se cruzan perpendicularmente dos a dos.

Para la construcción de estos poliedros, se necesitan las siguientes piezas:

A) POLIEDRO EXTERIOR CONVEXO, DE CARAS REGULARES VACIADAS E IGUALES, INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO r' = 110 mm

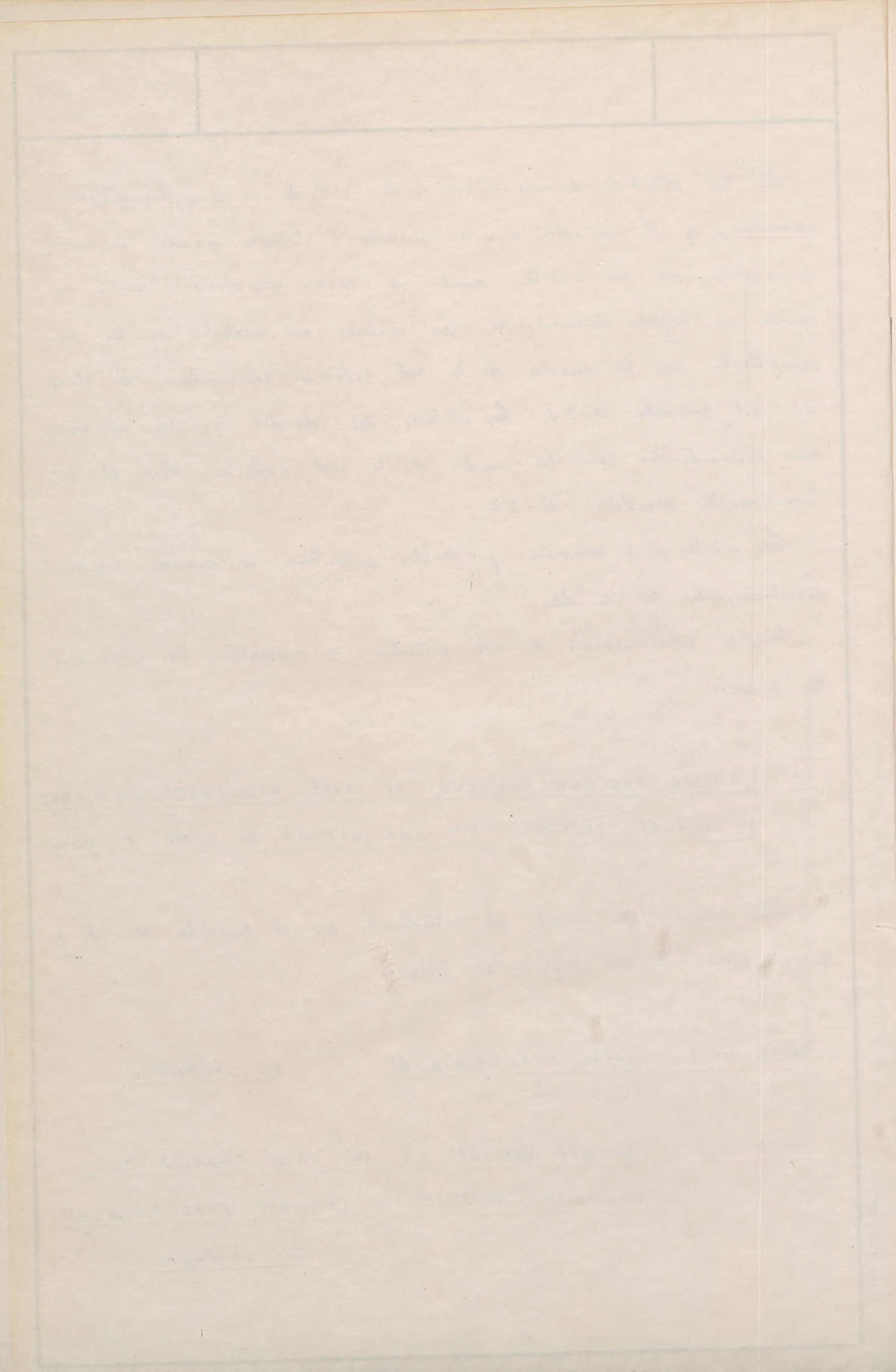
Este poliedro es igual al estudiado en el modelo M-2.8, y se compone de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS IGUALES DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES DE LA CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

UNE A 4-210 x 297

Calvarro Enero 1979



Modelo M-2.14

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LADO DESIGUAL DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES DE LAS CARAS SUPERFICIALES

12 unidades

B) POLIEDRO INTERIOR DE CARAS MACIZAS, FORMADO POR UN TETRAEDRO Y UN OCTAEDRO REGULARES Y CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, E INSCRITOS EN LA MISMA ESFERA CIRCUNSCRITA AL POLIEDRO A) EXTERIOR.

Este poliedro es el mismo interior del modelo M-2.13, y se compone de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES

6 unidades

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 12 unidades

PIEZA Nº 4 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

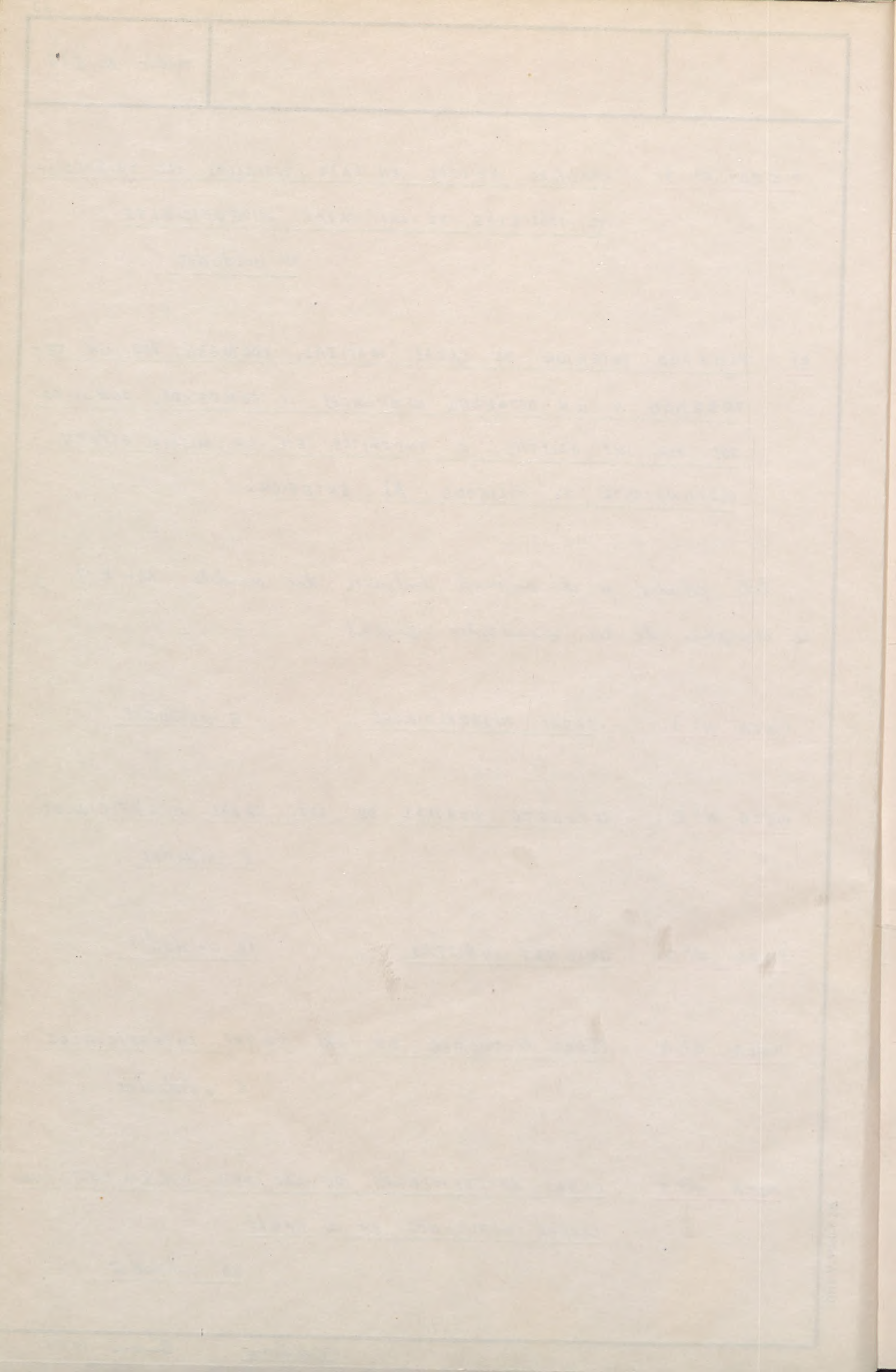
6 unidades

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES DE LAS SEIS PIRÁMIDES CUADRADAS REGULARES DE 4 CARAS

24 unidades

UNE A 4-210 x 297

Calvarez Enero 1979



Modelo M-2.14

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES ANTERIORES 24 unidades

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES CUADRANGULARES 48 unidades

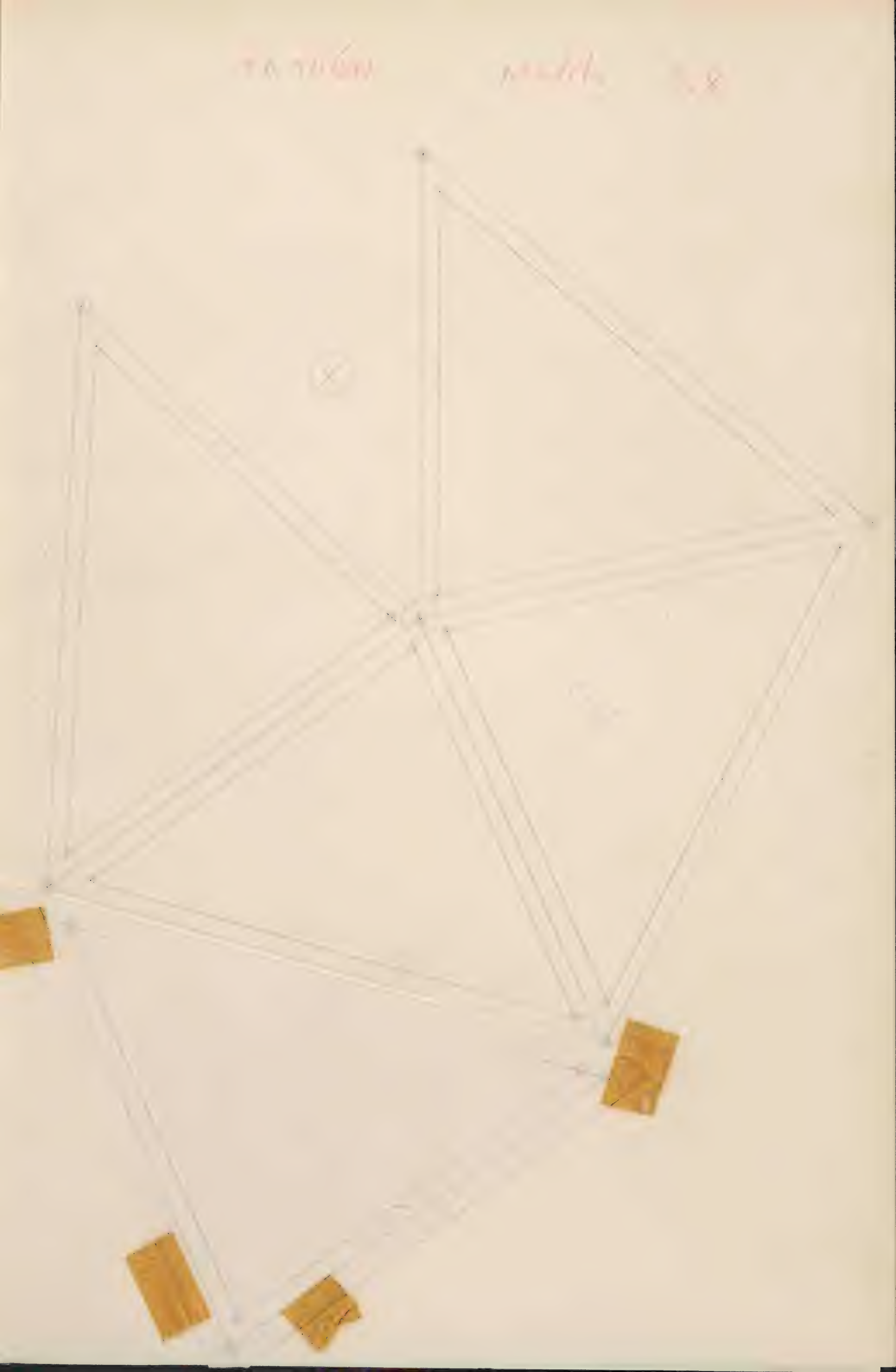
PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES CUADRANGULARES 24 unidades

---

UNE A 4-210 x 297

[signature] Enero 1979





POLIEDRO CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M - 2.4, Y EXAEDRO REGULAR CONVEXO INSCRITO EN EL MISMO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

UNE A 4-210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.15

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares, estudiado en el modelo M-2.7, e incluir en el mismo un escaedro regular convesco inscrito en la misma esfera que circunscribe al mencionado poliedro convexo de caras triangulares iguales.

En el estudio del modelo M-2.7, obtuvimos un poliedro convexo de veinticuatro caras triangulares iguales obtenido al unir los nudos de la red esférica tipo b) del modelo M-2,4, al transformarse los lados de los triángulos esféricos de dicha red, en triángulos rectilíneos cuyos lados eran las cuerdas de los arcos de círculo máximo que formaban los lados de la red.

Los nudos de la red esférica generadora los clasificábamos en dos clases distintas: Ocho de clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera; y Seis de clase b), vértices de un octaedro regular, también inscrito en la misma esfera.

En este modelo que estudiamos ahora, se incluye el escaedro regular convexo M-2.101 de caras macizas, dentro del poliedro M-2.8 de caras vaciadas. Los vértices comunes de ambos poliedros son lo de la clase b) mencionada anteriormente.

Para la construcción de estos poliedros, se necesitan las siguientes piezas:

Enero 1979



A) POLIEDRO EXTERIOR CONVEXO DE 24 CARAS TRIANGULARES IGUALES, INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO "r'" ($r' = 110$ mm).

Este poliedro (de caras vaciadas) es el mismo que el estudiado en el modelo M - 2,8, por lo que tendremos:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LADOS IGUALES DEL TRIÁNGULO DE LA CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LADO DESIGUAL DEL TRIÁNGULO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades.

B) EXAEDRO REGULAR CONVEXO INTERIOR, INSCRITO EN LA MISMA ESFERA DE RADIO "r'" ($r' = 110$ mm)

Este poliedro (de caras macizas) es el mismo que el estudiado en el modelo M - 2.101; por lo que tendremos:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 6 unidades

UNE A 4-210 x 297

[signature] Enero 1979



Hoja: N - 2.15

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 16 unidades

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 8 unidades

Enero 1979



	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 2.16

POLIEDRO CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M-2.6, Y EXAEDRO REGULAR INSCRITO EN EL MISMO.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

UNE A 4-210 x 297

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.16

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares, estudiado en el modelo M-2.9 e incluir en el interior del mismo un cuaceedro regular convexo inscrito en la misma esfera que circunscribe al mencionado poliedro convexo de caras triangulares iguales.

En el estudio del modelo M-2.9, obtuvimos un poliedro convexo de cuarenta y ocho caras triangulares iguales, obtenido al unir los nudos de la red esférica tipo c) del modelo M-2.6, al transformarse los lados de los triángulos esféricos de dicha red, en triángulos rectilíneos, cuyos lados eran las cuerdas de los arcos de círculo máximo que formaban los lados de la red.

Los nudos de la red esférica generadora los clasificamos en tres clases distintas: Ocho de clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera; Seis de clase b), vértices de un octaedro regular; y Doce de clase c), vértices de un Arquimediano III, también inscrito en la misma esfera.

En este modelo que estudiamos ahora, se incluye el escaectro regular convexo de CARAS MACIZAS dentro del poliedro M-2.10 de caras vaciadas. Los vértices comunes de ambos poliedros son los de la clase a) mencionada anteriormente.

Para la construcción de estos poliedros se necesitan las

siguientes piezas:

A) POLIEDRO EXTERIOR CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO "r'" (r' = 110 mm).

Este poliedro (de caras vaciadas) es el mismo que el estudiado en el modelo M - 2.10, por lo que tendremos:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 48 unidades

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "a" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL 24 unidades

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "b" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL 24 unidades

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "c" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL 24 unidades

B) EXAEDRO REGULAR CONVEXO, INSCRITO EN LA MISMA ESFERA DE RADIO "r'" (r' = 110 mm)

UNE A 4-210 x 297



		Modelo M-2,16

Este poliedro (de caras macizas) es el mismo que el estudiado en el modelo M-2,101, por lo que tendremos:

PIEZA Nº1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

PIEZA Nº2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 6 unidades

PIEZA Nº3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 24 unidades

PIEZA Nº4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

PIEZA Nº5 FORRO COLOREADO CARAS SUPERFICIALES 6 unidades



POLIEDRO CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M-2.4, y OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, INSCRITO EN EL MISMO.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ m m.

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares iguales, estudiado en el modelo M-2.7 e incluir en el mismo el octaedro regular convexo inscrito en la misma esfera que circunscribe al mencionado poliedro convexo de caras triangulares.

En el estudio del modelo M-2.7, obtuvimos un poliedro convexo de veinticuatro caras triangulares iguales obtenido al unir los nudos de la red esférica tipo b) del modelo M-2.4, al transformarse los lados de los triángulos esféricos de dicha red, en triángulos rectilíneos cuyos lados eran las cuerdas de los arcos de círculo máximo que formaban los lados de la red.

Los nudos de la red esférica generadora los clasificábamos en dos clases distintas: Ocho de clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera; y Seis de clase b), vértices de un octaedro regular, también inscrito en la misma esfera.

En este modelo que estudiamos ahora, se incluye el octaedro regular convexo M-3.101 de caras macizas, dentro del poliedro M-2.8 de caras vaciadas. Los vértices comunes de ambos poliedros son los de la clase b), mencionada anteriormente.

Para la construcción de estos poliedros, se necesitan las siguientes piezas:

Alvarez Enero 1971

UNE A 4-210 x 297



A) POLIEDRO EXTERIOR CONVEXO DE 24 CARAS TRIANGULARES IGUALES, INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO "r'" (r' = 110 m m).

Este poliedro (de caras vaciadas) es el mismo que el estudiado en el modelo M- 2.8, por lo que tendremos:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LADOS IGUALES DEL TRIÁNGULO DE LAS CARAS SUPERFICIALES
24 unidades

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LADO DESIGUAL DEL TRIÁNGULO DE LAS CARAS SUPERFICIALES
12 unidades

B) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO INTERIOR, INSCRITO EN LA ESFERA DE RADIO "r' = 110 m m"

Este poliedro (de caras macizas) es el mismo que el estudiado en el modelo M-3.101, por lo que tendremos:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades



PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 8 unidades

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR

24 unidades

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

8 unidades

POLIEDRO CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, DERIVADO DE LA RED ESFÉRICA EXAÉDRICA DEL MODELO M-2.6 Y OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, INSCRITO EN EL MISMO

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 mm.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras triangulares, estudiado en el modelo M-2.9, e incluir en el interior del mismo un octaedro regular convexo inscrito en la misma esfera que circunscribe al mencionado poliedro convexo de caras triangulares iguales.

En el estudio del modelo M-2.9, obtuvimos un poliedro convexo de cuarenta y ocho caras triangulares iguales, obtenido al unir los nudos de la red esférica tipo c) del modelo M-2.6, al transformarse los lados de los triángulos esféricos de dicha red, en triángulos rectilíneos, cuyos lados eran cuerdas de los arcos de círculo máximo que formaban los lados de la red.

Los nudos de la red esférica generadora los clasificamos en tres clases distintas: Ocho de la clase a), vértices de un cubo inscrito en la esfera; Seis de clase b), vértices de un octaedro regular; y Doce de clase c), vértices de un Arquimediano III, también inscrito en la misma esfera.

En este modelo que estudiamos ahora, se incluye el octaedro regular convexo de caras macizas dentro del poliedro M-2.10 de caras vaciadas. Los vértices comunes

[illegible] Enero 1979



de ambos poliedros son los de la clase b) mencionada anteriormente.

Para la construcción de estos poliedros se necesitan las siguientes piezas:

A) POLIEDRO EXTERIOR CONVEXO DE CARAS TRIANGULARES IGUALES, INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO "r'" (r' = 110 mm).

Este poliedro (de caras vaciadas) es el mismo que el estudiado en el modelo M - 2,10, por lo que tendremos:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 48 unidades

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "a" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL
24 unidades

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "b" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL
24 unidades

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LOS LADOS "C" DEL TRIÁNGULO DE UNA CARA SUPERFICIAL
24 unidades



Modelo 2.18

B) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, INSCRITO EN LA MISMA ESFERA DE RADIO "r'" ($r' = 110$ mm)

Este poliedro (de caras macizas) es el mismo que el estudiado en el modelo M - 3,101, por lo que tendremos:

PIEZA Nº 1 — CARAS SUPERFICIALES — 8 unidades

PIEZA Nº 2 — REFUERZO NORMAL INTERIOR — 8 unidades

PIEZA Nº 3 — REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR — 24 unidades

PIEZA Nº 4 — UNIONES ARISTAS — 12 unidades

PIEZA Nº 5 — FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES — 8 unidades

UNE A 4-210 x 297

Enero 1979



MODELO CORPÓREO COMPUESTO DE LOS SIGUIENTES POLIEDROS: 1) EXAEDRO REGULAR CONVEXO, CIRCUNSCRITO AL: 2) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO.

Radio de la esfera circunscrita común:

$r' = 110$ mm

UNE A4 210 x 297

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 2,19

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo, compuesto de los siguientes poliedros: 1) Exaedro regular convexo, circunscrito al: 2) Tetraedro regular convexo.

En este modelo se pone de manifiesto la propiedad de ser: "El exaedro regular convexo circunscribible al tetraedro regular convexo cuando ambos poliedros tienen sus centros coincidentes y de igual radio sus respectivas esferas circunscritas"

Siendo esta propiedad equivalente a la enunciada en el estudio del modelo M- 1,5, se llega a la conclusión de que los modelos M - 1,5 y M - 2,19 son iguales por lo que remitimos la construcción de éste a la del mencionado modelo M - 1,5

UNE A4 210 x 297

Tabanera Marzo 1979

Variante del modelo M-2.19

MODELO CORPÓREO COMPUESTO DE LOS SIGUIENTES POLIEDROS: 1) EXAEDRO REGULAR CONVEXO, CIRCUNSCRITO AL: 2) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO. ———

Radio de la esfera circunscrita común

r' = 76,1 m m.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros. MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 2.20

Variante del modelo M - 2.19

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo, compuesto de los siguientes poliedros: 1) Exaedro regular convexo, circunscrito al; 2) Tetraedro regular convexo.

Este modelo es análogo al estudiado en el M-2.19, pero con la variante de ser de menor tamaño ($r^6_{e_c}$ = 76.1 mm).

De acuerdo con la propiedad expresada en el modelo M-2.19, equivalente a la enunciada en el estudio del modelo M-1.5, se llega igualmente a la conclusión de que los modelos M-1.6 y M-2.20 son iguales; por lo que remitimos la construcción de éste a la del mencionado modelo M-1.6

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Marzo 1979



MODELO CORPÓREO COMPUESTO DE LOS SIGUIENTES POLIEDROS: A) POLIEDRO CONVEXO DE 24 CARAS VAciadas, INSCRITO EN A. B) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS INSCRITO EN A. C) CONJUNTO COMPUESTO DEL MODELO M-19.2, INSCRITO TAMBIÉN EN A.

Radio de la esfera circunscrita común

r' = 110 mm.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 2.21

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo compuesto de los siguientes poliedros: A) Poliedro convexo de 24 caras igual al modelo M-2.8; B) Octaedro regular convexo de caras vaciadas, inscrito en A.; C) Conjunto compuesto del modelo M-19.2 inscrito también en A.

DATO r_{ec} = Radio de la esfera circunscrita al poliedro modelo M-2,8

r_{ec} = 110 mm

Los poliedros componentes de este modelo tienen las siguientes características constructivas:

A) Poliedro convexo de 24 caras vaciadas igual al del modelo M-2,8

B) Octaedro regular convexo de caras vaciadas, inscrito en A.

c) Componentes del modelo M-19.2:

c1) Octaedro regular convexo de caras macizas

c2) Dos tetraedros regulares convexos, de caras vaciadas

Los poliedros B) y c2), están inscritos en A), siendo el radio de sus esferas circunscritas, iguales ($r_{ec}^{4} = r_{oc}^{8} = r_{oc}^{M-19.2}$)

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes

Alvarez Marzo 1979

piezas:

A) POLIEDRO CONVEXO DE 24 CARAS VACIADAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-2.8

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Igual a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-2.8

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LADOS IGUALES DEL TRIÁNGULO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig.2) del modelo M-2.8

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LADO IGUAL DEL TRIÁNGULO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Igual a la pieza nº 3 (fig.3) del modelo M-2.8

B) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS INSCRITO EN EL POLIEDRO M-2.8

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-3.102

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Igual a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-3.102

UNE A4 210 x 297



PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M- 3.102

---

c) COMPONENTES DEL MODELO M-19.2

C1) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS, SÓLIDO COMÚN DE LOS DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS.

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-19.2

PIEZA Nº 6 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Igual a la pieza nº1 del modelo M-19.2

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPEDFICIALES 8 unidades

Igual a la pieza nº2 del modelo M-19.2

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 16 unidades

Igual a la pieza nº 3 del modelo M-19.2

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Igual a la pieza nº 4 del modelo M-19.2



Modelo M-2.21

PIEZA N° 10 FORRO COLOREADO 8 unidades

Igual a la piesa n° 5 del modelo M-19.2

C2) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS, EN EL CUAL ESTÁ UBICADO EL OCTAEDRO C1

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-1.102

PIEZA N° 11 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la piesa n° 1 del modelo M-1.102

PIEZA N° 12 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Igual a la piesa n° 2 del modelo M-1.102

C3) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS, CONJUGADO POR SUS ARISTAS CON EL TETRAEDRO C2, Y FORMADO POR CUATRO TETRAEDROS REGULARES DE CARAS VACIADAS, Y ARISTA $a_4 = a_8$

PIEZA N° 13 DESARROLLO DE LAS TRES CARAS LATERALES EN CADA VÉRTICE 4 unidades

Iguales a la piesa n° 5 (fig. 3) del modelo M-19.1

UNE A4 210 x 297

[signature] Marzo 1979



Modelo M - 23.1

PIEZA Nº 14 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Igual a la pieza nº 6 (fig. 4) del modelo M - 19.1

UNE A4 210 x 297

Mar 20 1979



PATTERN Model M-2.24

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS MACIZAS, OBTENIDO AL CONSTRUIR SOBRE CADA CARA DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO, Y HACIA SU EXTERIOR, UN PRISMA RECTO REGULAR, CUYA BASE ES DICHA CARA Y SUS CARAS LATERALES SON CUADRADOS.

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 m m.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo de caras macizas. Obtenido al construir sobre cada cara de un exaedro regular convexo, y hacia su exterior, un prisma recto regular, cuya base es dicha cara, y sus caras laterales son cuadrados.

Se tiene como dato único el del radio "r_{ec}" de la esfera circunscrita, que contiene todos los vértices exteriores (vértices de los cuadrados de las bases del prisma opuestas a las caras del exaedro generador.

$$r_{ec} = 110 \text{ mm}$$

---

1) PROPIEDADES

De la definición de este poliedro, se deducen las siguientes propiedades que enunciamos a continuación, siendo algunas de ellas básicas para el cálculo de sus dimensiones.

P1) Los prismas rectos construidos sobre cada cara del exaedro generador, son de bases cuadradas, siendo

UNE A4 210 x 297



Modelo M-2.22

a su vez, cuadradas sus cuatro caras laterales; por consiguiente, dichos prismas serán exaedros regulares convexos de igual arista que la del exaedro generador.

P 2) El poliedro pedido, se compone de 6 exaedros regulares convexos, iguales al generador y de arista a_6. Estos exaedros tienen las aristas de sus bases inferiores, comunes dos a dos.

P3) El número de sus caras cuadradas, será pues:

$$C_4 = 6 \times 5 = \underline{30 \text{ caras}}$$

El número de sus vértices, será:

En las bases superiores = 4 × 6 = 24
En las bases inferiores = 8
Total 32 vértices

El número de aristas, será:

En las bases superiores = 6 × 4 = 24
En las bases inferiores = 12
En las caras laterales = 6 × 4 = 24
Total 60 aristas

En resumen, este poliedro, tiene:

C = 30 caras
V = 32 vértices
A = 60 aristas

Octubre - 1979



y verifica también el teorema de Euler para poliedros convexos

$$C + V = 30 + 32 = 62 = A + 2 = 60 + 2$$

P 4) La altura h_4 del prisma recto (o exaedro regular convexo), construido sobre cada cara del exaedro generador de arista a_6, es:

$$h_4 = a_6$$

P 5) Si unimos un vértice "V" de la base superior del prisma recto anterior, con el centro "C" del cuadrado de dicha base; a continuación éste con el centro "O" del exaedro generador, y finalmente "V" con "O", se nos formará el triángulo rectángulo "VCO" en el que la hipotenusa $\overline{VO}$ será el radio "r_{ec}" de la esfera circunscrita al poliedro estudiado; el cateto "$\overline{VC}$", será el radio "r_{c-4}" de la circunferencia circunscrita a la cara cuadrada exterior; el otro cateto "$\overline{CO}$" es la suma del radio "r_{ei}^{6}" de la esfera inscrita en el exaedro generador y la altura "h_4" del prisma,

Por consiguiente tendremos:

$\overline{VO} = r_{ec}$ $\quad$ $\overline{VC} = r_{c-4}$ $\quad$ y $\overline{CO} = r_{ei}^{6} + h_4$

verificándose que:

(2) $\qquad \overline{VO}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{CO}^2$, donde sustituyendo

UNE A4 210 x 297

Alvarez Octubre 1979

valores, será:

$$r_{ec} = \sqrt{(r_{c-4})^2 + (r_{ei}^6 + h_4)^2} \qquad (3)$$

Para desarrollar la formula (3) sustituyamos en ella los siguientes valores en función de "a_6"

1º "r_{c-4}" = Radio de la circunferencia circunscrita a la cara cuadrada exterior de lado a_6 (arista del exaedro generador

(Por ejercicio G.P. 1.400-43)

$$r_{c-4} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6 \qquad (4)$$

2º

$$h_4 = a_6 \qquad r_{ei}^6 = \frac{1}{2} a_6 \qquad (5)$$

Valores que sustituidos en (3) nos dará:

$$r_{ec} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a_6\right)^2 + \left(\frac{1}{2} a_6 + a_6\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2}\, a_6 = \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2}\, a_6 =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{9}{4}}\, a_6 = \sqrt{\frac{11}{4}}\, a_6 = \frac{\sqrt{11}}{2} a_6 \qquad (6)$$

El valor de a_6 en función de r_{ec}, se obtendrá de (6)

$$a_6 = r_{ec} : \frac{\sqrt{11}}{2} = r_{ec} \times \frac{2}{\sqrt{11}} = r_{ec} \times \frac{2\sqrt{11}}{11} = 0,60\ 30\ 22\ 68\ 9 \times r_{ec}$$

En el modelo estudiado, será:

$$a_6 \simeq 0.60\ 30\ 22\ 68\ 9 \times 110 = 66,3 \text{ mm}$$

Octubre - 1979



Modelo M- 2.22

El modelo estudiado, de caras macizas, se compondrá de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1.- DESARROLLO LATERAL Y BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO CUADRANGULAR (CUBO) 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

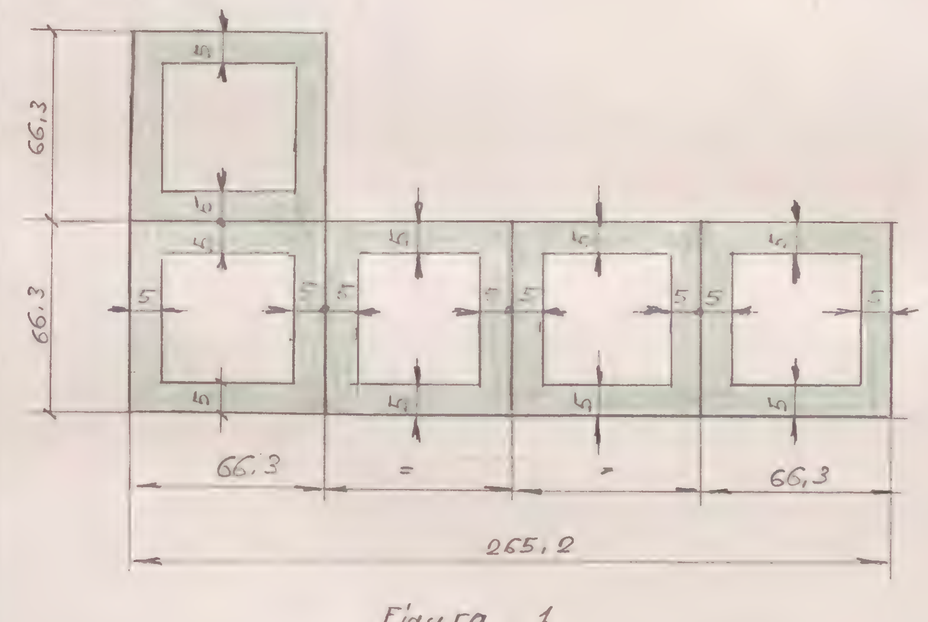


Figura 1

PIEZA Nº 1

6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

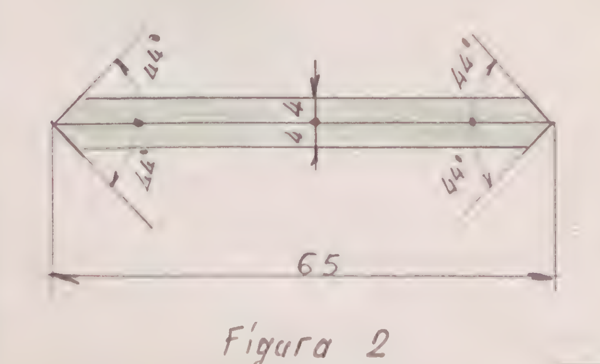


Figura 2

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 2



PIEZA Nº3 FORRO MACIZO DE LAS CARAS DEL PRISMA RECTO CUADRANGULAR (EXAEDRO REGULAR CONVEXO)

30 unidades

Son cuadrados. Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

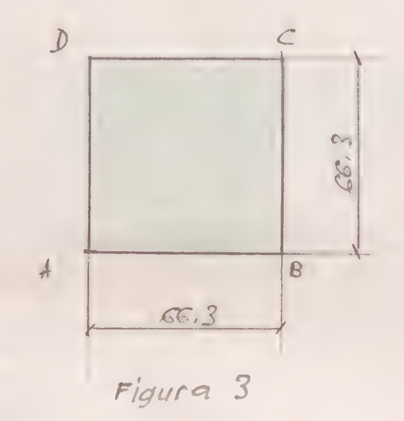


Figura 3

PIEZA Nº 3 30 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS DEL PRISMA RECTO (EXAEDRO REGULAR CONVEXO)

30 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCDA de la figura 3, y se detallan en la figura 4

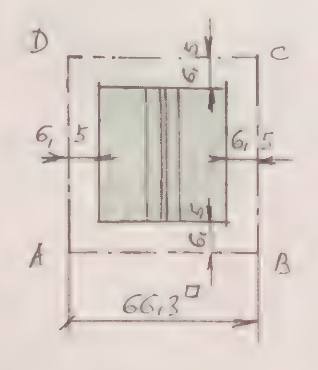


Figura 4

PIEZA Nº4 30 (u)

Figura 4



PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS DEL PRISMA RECTO (EXAEDRO REGULAR CONVEXO)

60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su colocación, en la figura 4.

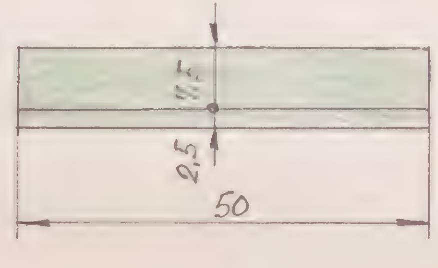


Figura 5

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN LAS CARAS LATERALES Y BASE DEL PRISMA RECTO (EXAEDRO REGULAR CONVEXO)

30 unidades

Su forma y dimensiones se deducen del cuadrado ABCDA de la figura 3 y se detallan en la figura 6

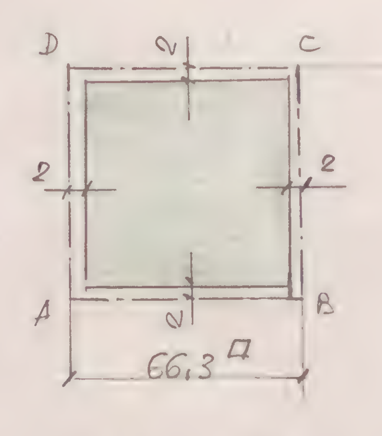


Figura 5

PIEZA Nº 6 30 (u)

Figura 5





Modelo M-2.22

ESTUDIO COMPLEMENTARIO

El estudio de este modelo corpóreo, cuya ley de generación se detalla en su enunciado, nos ha conducido a la obtención de un poliedro cóncavo, compuesto de seis exaedros regulares convexos acoplados por las aristas inferiores de sus bases que son comunes dos a dos.

Las aristas de este poliedro, todas de igual longitud, e iguales a su vez a la arista "a_6" del exaedro generador, son de dos clases. En la primera incluiremos las correspondientes a las dos bases de cada exaedro regular convexo, y en la segunda las de las caras laterales de dichos exaedros.

Si unimos ahora convenientemente dos a dos los vértices de los cuadrados de las bases superiores de los exaedros regulares convexos, obtendremos 8 caras triangulares asociadas a cada vértice del exaedro generador, y otras 12 caras rectangulares asociadas a cada arista del mencionado exaedro generador.

Estas nuevas caras, juntamente con las de las bases superiores de los exaedros regulares convexos, forman un poliedro convexo de las siguientes características:

a) Caras cuadradas de arista "a_6" = 6

b) Caras triangulares equiláteras de arista l_3 = 8

c) Caras rectangulares de aristas a_6 y l_3 = 12

Total 26 caras

Alvarez Octubre 1979



d) Aristas de las caras a) $= \frac{6 \times 4}{2} = 12$

e) Aristas de las caras b) $= \frac{8 \times 3}{2} = 12$

f) Aristas de las caras c) $= \frac{12 \times 4}{2} = 24$

Total 48 aristas

g) Vértices $= 6 \times 4 =$ 24 vértices

Verificándose el teorema de Euler para los poliedros convexos

$$C + V = A + 2 \quad \therefore \quad 26 + 24 = 48 + 2 = 50$$

Las caras triangulares son triángulos equiláteros, de lado l_3 mayor que la arista "a_6" del exaedro regular convexo generador.

$$\boxed{l_3 = a_3 > a_6} \qquad 1)$$

Las caras rectangulares tienen dos lados iguales a las aristas "a_6". y los otros dos iguales a "l_3".

La longitud de la arista "l_3" es la de la diagonal del cuadrado de una cara del exaedro regular convexo generador, por lo que tendremos:

$$\boxed{l_3} = \sqrt{2} \times a_6 = 1,41\,42\,13\,56\,2\ldots \times 66,3 = \boxed{93,8 \text{ mm}}$$

El modelo corpóreo del poliedro convexo que se obtendría



como consecuencia de este estudio complementario, es similar al desarrollado en el estudio del Arquimediano V, (lámina 37), compuesto de:

(1) 8 caras triangulares
(2) 18 caras cuadradas
(3) 48 aristas
(4) 24 vértices

Todas regulares y aristas iguales.

y concurren en cada vértice: $1C_3 + 3C_4$

Las condiciones (1), (3) y (4) se cumplen en el poliedro estudiado.

La condición (2) varía, por pasar a ser las 18 caras cuadradas, a 6 cuadradas de arista "a_6" y 12 rectángulares de aristas $a_6 \times l_3$.

Para obtener el modelo corpóreo de este estudio complementario, puede utilizarse el mismo modelo M-2.22, completándolo con las aristas "l_3" de las caras triangulares y rectangulares, que es lo que hemos realizado en dicho modelo corpóreo.

Calvarro Octubre 1979

MODELO M- 2.22

Patrones

PIEZA Nº 6

30 (u)

PIEZA Nº 1
6 (u) +

PIEZA Nº 4

36 (u)

VARIANTE DEL POLIEDRO CÓNCAVO M-2.22, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES Y CONSTRUIDO: A) EL EXAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON SUS CARAS MACIZAS; Y B) EL PRISMA RECTO CUADRANGULAR DE CARAS LATERALES CUADRADAS, CON SUS CARAS VACIADAS

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 m m.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del poliedro cóncavo M.- 2.22, de igual forma y dimensiones, y construido: A) El exaedro regular convexo generador, con sus caras macizas; y B) El prisma recto cuadrangular de caras laterales cuadradas, con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M - 2.22.

Para la construcción de este modelo son necesarias las siguientes piezas:

A) EXAEDRO REGULAR CONVEXO, DE CARAS MACIZAS Y ARISTA $a_6 = 66,3$ mm

PIEZA Nº 1: CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Son cuadradas; su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

D C

A B

66.3 □

Figura 1

PIEZA Nº 1 6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

La forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCDA de la figura 1, y se detallan en la figura 2

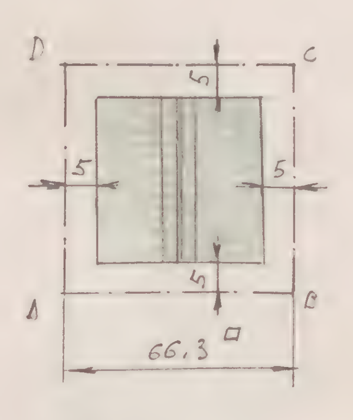


Figura 2

PIEZA Nº 2 6 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 12 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

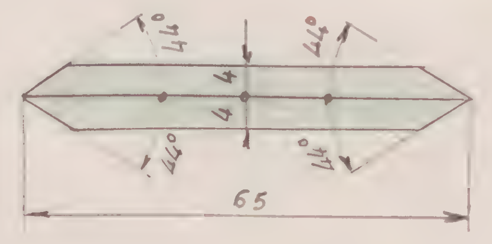


Figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3



Modelo M - 2.23

PIEZA Nº 4 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Su colocación se detalla en la figura 2; su forma y dimensiones en la figura 4.

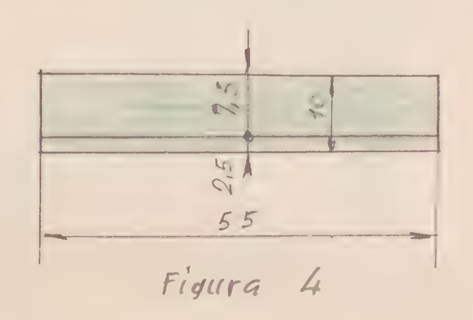


Figura 4

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 6 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCDA de la figura 1, y se detallan en la figura 5

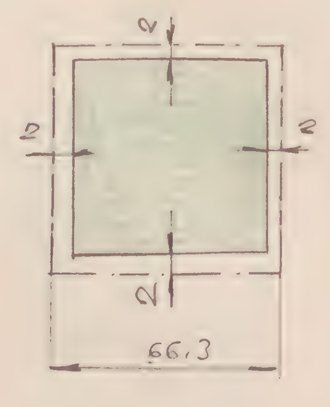


Figura 5

PIEZA Nº 5 6 (u)

Figura 5

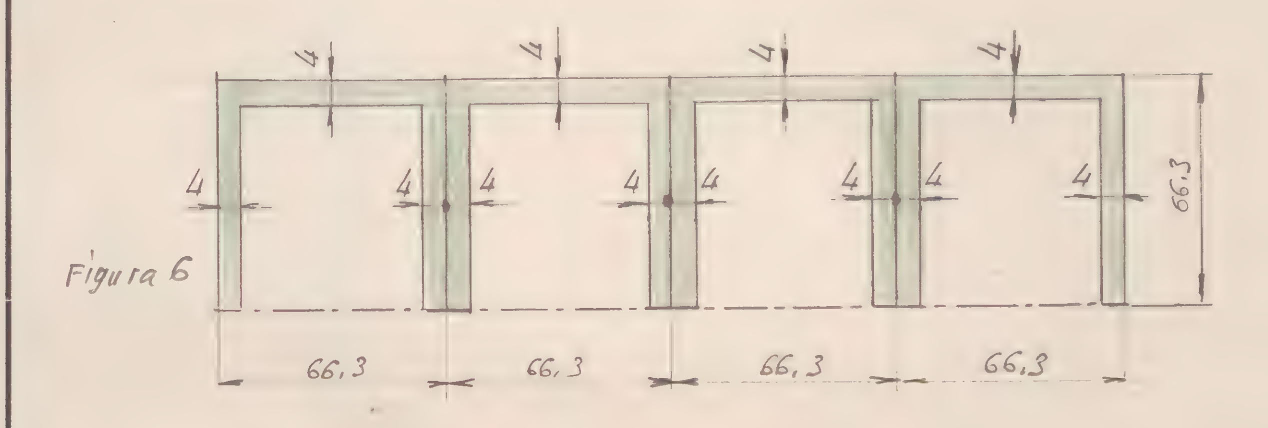
B) PRISMA CUADRANGULAR RECTO, DE CARAS LATERALES CUADRADAS, CON SUS CARAS VACIADAS DE ARISTA a_6 = 66,3 mm.



Modelo M-2.23

PIEZA Nº 6 DESARROLLO LATERAL DEL PRISMA RECTO CUADRANGULAR. 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



PIEZA Nº 6 6 unidades

PIEZA Nº 7 BASE CUADRADA DEL PRISMA RECTO CUADRANGULAR 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

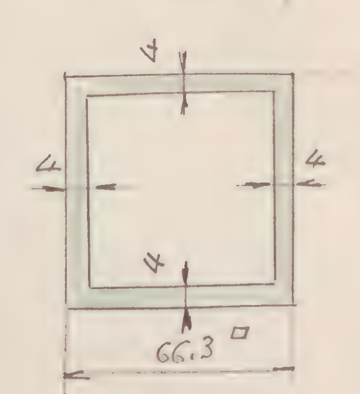


Figura 7

PIEZA Nº 7 6 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 48 unidades

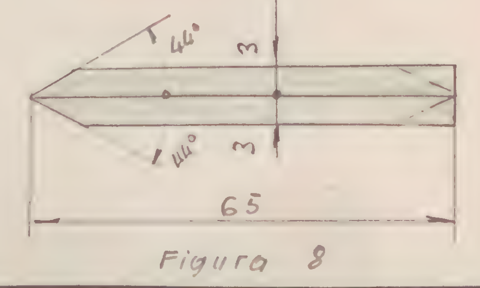


Figura 8

PIEZA Nº 8 48 (u)

Figura 8

UNE A 4-210 x 297

Noviembre 1979

MODELO M-2.23

PATRONES

MODELO CORPÓREO DEL EXAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE ARISTA "a_8", A LA DISTANCIA "$x = \frac{2}{3} a_8$", SIENDO LA LONGITUD DE LA ARISTA DEL EXAEDRO GENERADO "$a'_6 = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8$". - EL EXAEDRO GENERADO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL OCTAEDRO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-2.24

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del exaedro regular convexo, obtenido por truncadura de vértices de un octaedro regular convexo generador, de arista "a_8", a la distancia "$x = \frac{2}{3} a_8$", siendo la longitud de la arista del exaedro generado, "$a_6' = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8$" .- El exaedro generado, se construirá con las caras macizas, y el octaedro generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

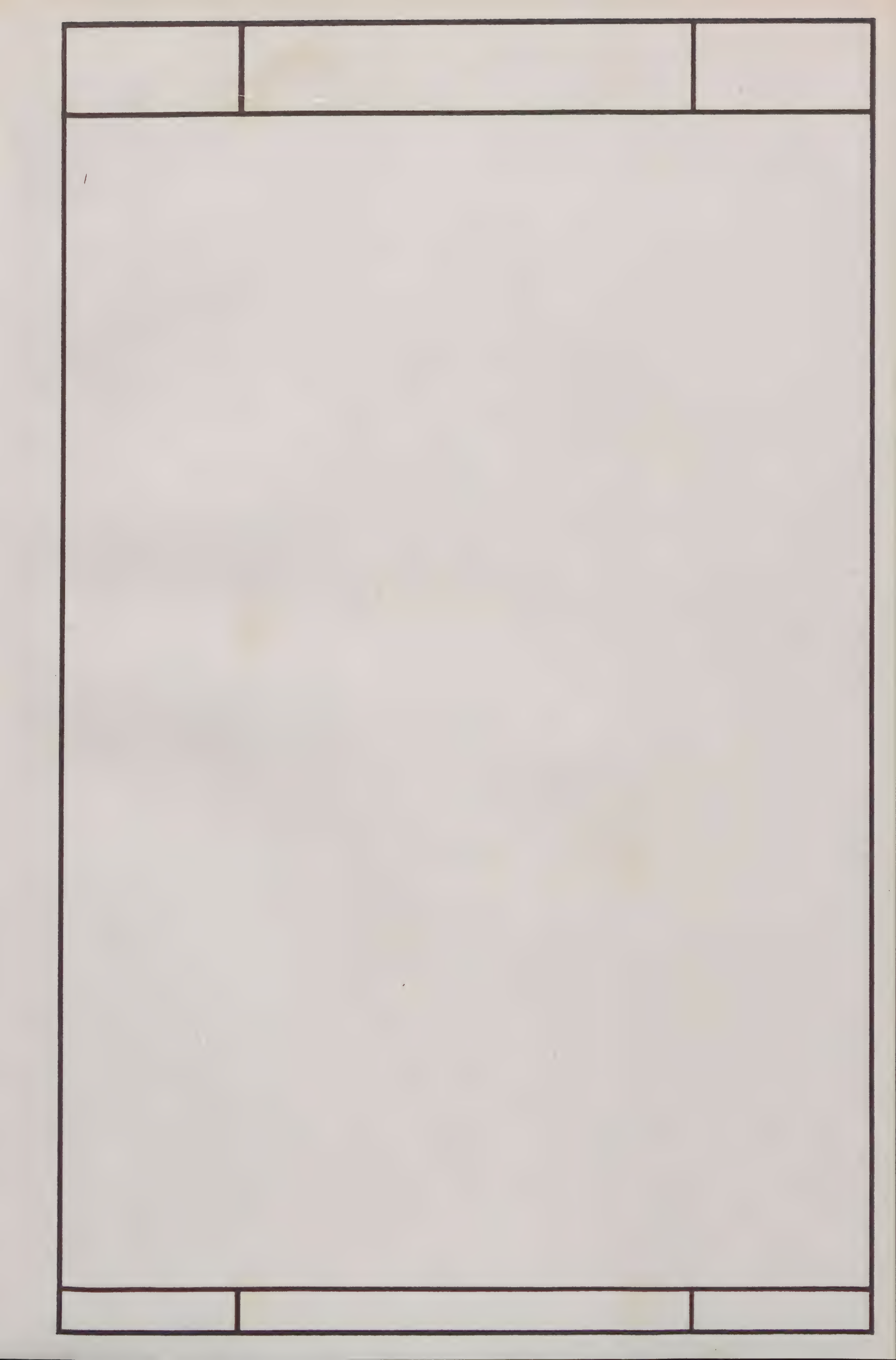
$r_{ec}^{8} = 110$ mm

NOTA: Este modelo es igual al M-8.2, por lo que no se ha repetido su ejecución

UNE A4 210 x 297

[illegible] Marzo 1981





	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-3.1

OCTAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo, representado en la lám. 3 del ejercicio G.E. (?)

DATOS Radio "r_{c-8}" o radio de la esfera circunscrita al octaedro regular pedido.

$$r^{8}_{ec} = 76{,}1 \text{ mm}$$

Las características del octaedro regular convexo, son las siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 8$
Número de vértices	$V = 6$
Número de aristas	$A = 12$
Número de caras en cada vértice	$4\ P_3$

El modelo corpóreo que se estudia es de caras macizas.

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 - CARA TRIANGULAR = 8 unidades

Es un triángulo equilátero, cuyo lado l_3 es igual a la



arista a_8 del octaedro pedido.

Su valor se obtiene despejando a_8 de la fórmula nº del ejercicio 6.E.

$$r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_8 \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_8} = r_{ec}^{8} : \frac{\sqrt{2}}{2} = r_{ec}^{8} \times \sqrt{2} =$$

$$= 76.1 \times \sqrt{2} \cong 107.62\,16\,52\,1... \cong \boxed{107.6 \text{ mm}}$$

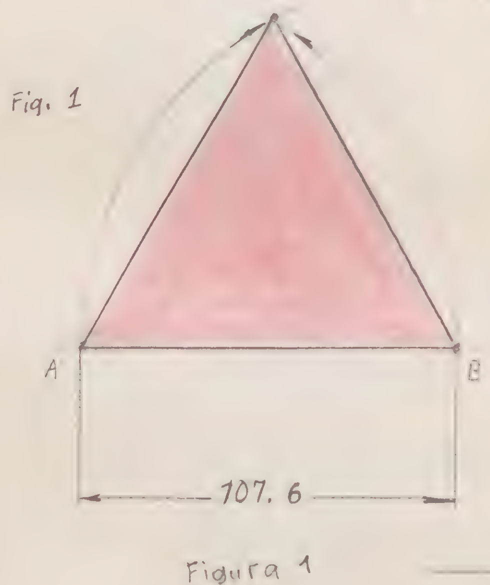


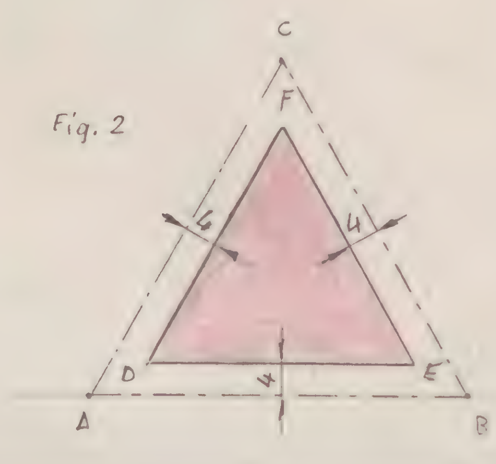
Figura 1

PIEZA Nº 1 8 (U)

Fig. 1

PIEZA Nº 2 = REFUERZO NORMAL INTERIOR = 8 (unidades)

Es un triángulo equilátero cuyo lado l_3 se deduce del triángulo ABC de la figura 1 (triángulo DEF, de la fig. 2)



PIEZA Nº 2 8 (U)

Fig. 2

UNE A 4-210 x 297



PIEZA Nº 3 - REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 24 unidades

Su longitud se deduce del triángulo DEF de la fig. 2 (radio de la circunferencia circunscrita)

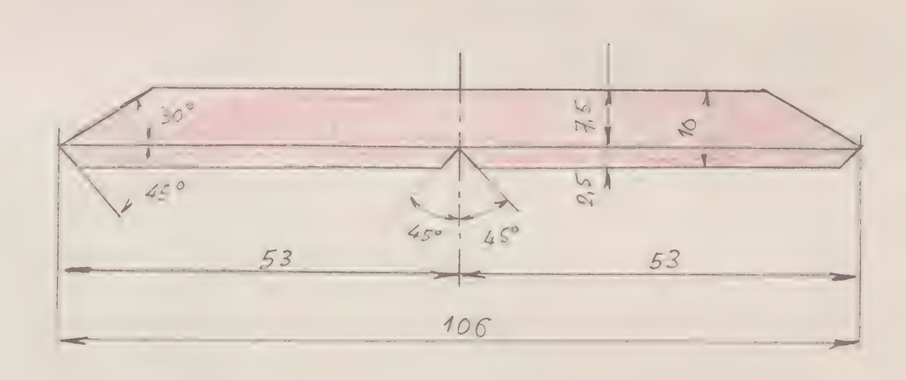
Fig. 3

F
53
G
D
E

PIEZA Nº 3 24 (u)

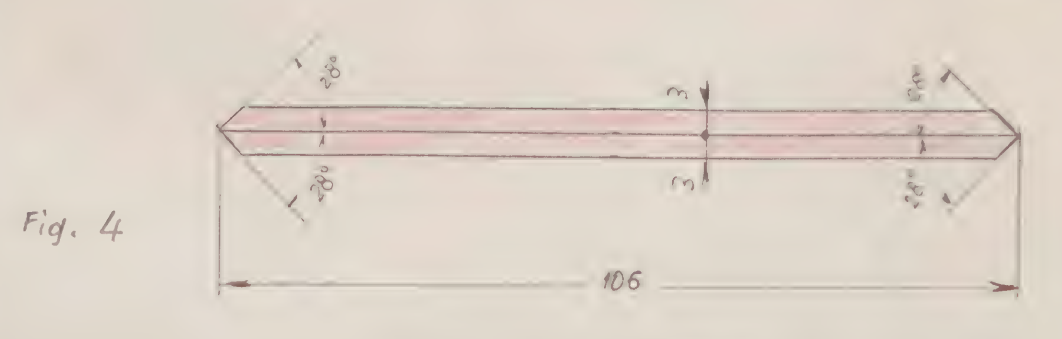
(simétricas 2 a 2)

Fig. 3



PIEZA Nº 4 - UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_8 (ver fig. 1; a_8 = 107.6 mm).- La tomamos igual a 106 mm.



PIEZA Nº 4

12 unidades

Fig. 4

Octubre - 1978



Mod. M-3.1

PIEZA Nº 5 - FORRO COLOREADO 8 unidades

Es un triángulo equilátero cuyo lado l_3 se deduce del triángulo ABC de la fig. 1. (triángulo GHI, de la fig. 5)

PIEZA Nº 5 8 (u)

Fig. 5

Fig. 5

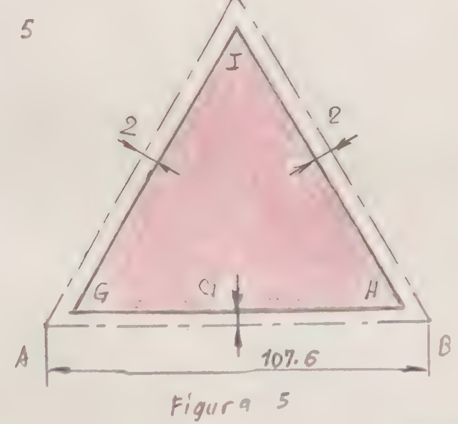


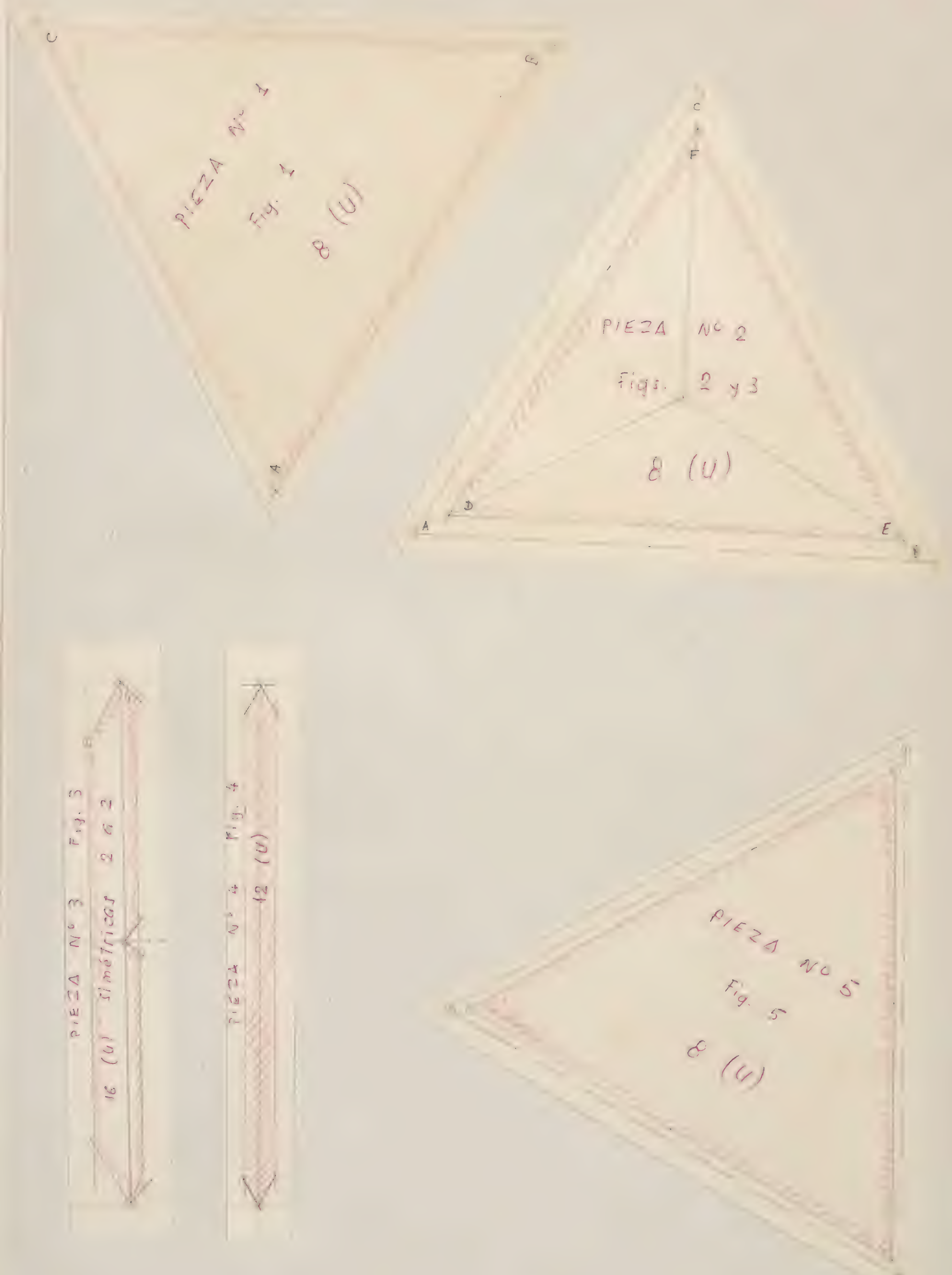
Figura 5

UNE A 4-210 x 297

Octubre 1978



PATRONES


C
F
PIEZA Nº 1
Fig. 1
8 (U)
A
C
F
PIEZA Nº 2
Figs. 2 y 3
8 (U)
D
A
E
PIEZA Nº 3 Fig. 5
16 (U) simétricas 2 a 2
PIEZA Nº 4 Fig. 4
12 (U)
PIEZA Nº 5
Fig. 5
8 (U)

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-3.101

OCTAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

UNE A 4-210 x 297

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 3.101

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo, representado en la lámina 3 del ejercicio G.E.

DATO: Radio "r_{ec}^{8}" de la esfera circunscrita al octaedro regular pedido:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

Las características del octaedro regular convexo, son las siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 8$
Número de vértices	$V = 6$
Número de aristas	$A = 12$
Número de caras en cada vértice	$4\,P_3$

El modelo que se estudia es de caras macizas

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Son triángulos equiláteros, cuyo lado "l_3" es igual a la arista



a_8 del octaedro pedido.

Su valor se obtiene despejando "a_8" de la fórmula nº del ejercicio G. E. , o sea

$$r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_8 \qquad \text{de donde} \qquad \boxed{a_8} = r_{ec}^{8} : \frac{\sqrt{2}}{2} = r_{ec}^{8} \times \frac{2}{\sqrt{2}} =$$

$$= r_{ec}^{8} \times \frac{2\sqrt{2}}{2} = r_{ec}^{8} \times \sqrt{2} \cong 1,41\,42\,13\,56\,2\ldots \times 110 \approxeq \boxed{155,6 \text{ mm}}$$

Su forma y dimensiones se representan en la figura 1

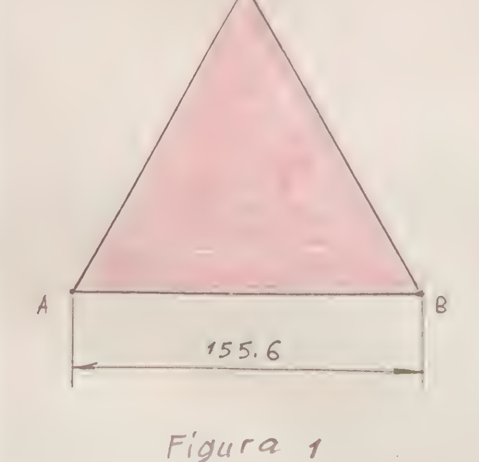


Figura 1

PIEZA Nº 1 8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 8 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 2, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1

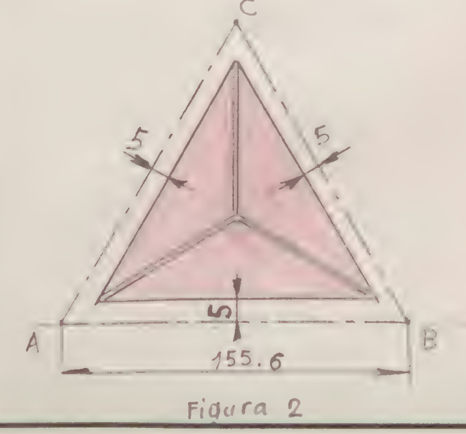


Figura 2

PIEZA Nº 2 8 (u)

Figura 2

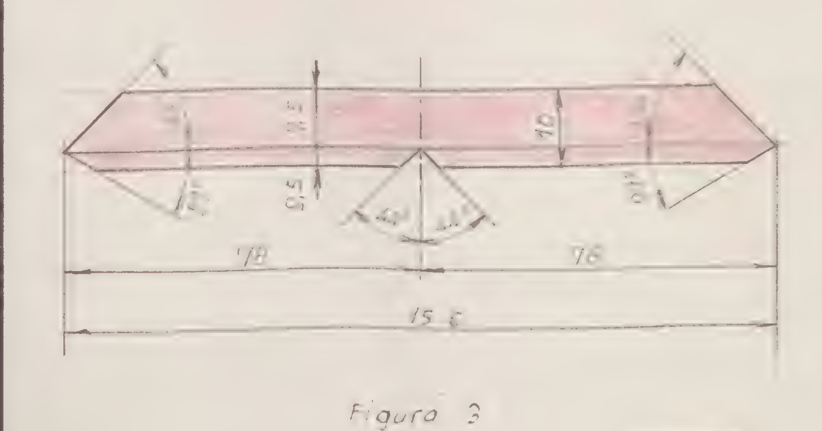
Enero 1979



Modelo M-3.101

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR: 24 unidades

Se colocan en la dirección de las bisectrices del triángulo ABC de las caras superficiales (fig. 2), y su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.



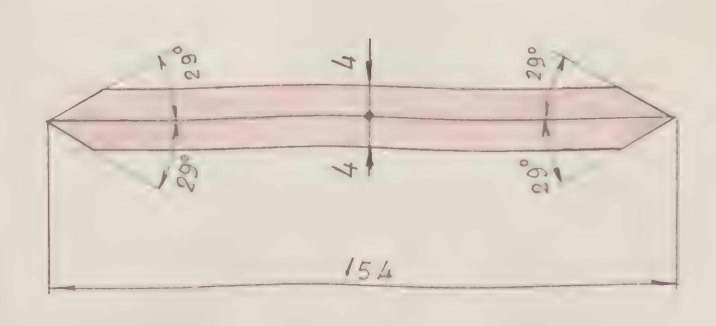
PIEZA Nº 3 24 (u)
simétricas 2 a 2

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_8 (ver fig. 1); a_8 = 155.6 m m .- La tomamos igual a 154 m m.



PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

8 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 5, y se



Solución de a del triángulo ABC de la figura 1.

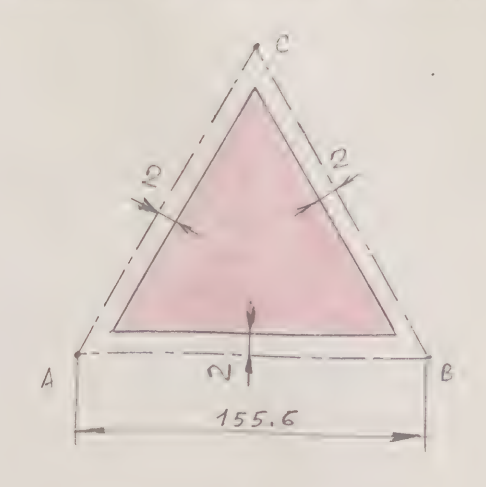


Figura 5

PIEZA Nº 5 8 (a)

Figura 5



	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-3.102

OCTAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ m m.

UNE A 4-210 x 297

	Ejercicio de construcción de poliedros. MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-3.102

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo, representado en la lámina 3 del ejercicio G.E.

DATO: Radio "r_{ec}^{8}" de la esfera circunscrita al octaedro regular pedida

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm.}$$

El modelo corpóreo que se estudia es de caras vaciadas, variante del modelo M-3.101, con sus mismas dimensiones y características siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 8$
Número de vértices	$V = 6$
Número de aristas	$A = 12$
Número de caras en cada vértice	4 P_3

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Son triángulos equiláteros, cuyo lado l_3 es igual al de la arista a_8 del octaedro pedido.



El valor de la arista del poliedro a_8 de la fórmula nº del ejercicio G.E. , o sea:

$$r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_8 \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_8} = r_{ec}^{8} : \frac{\sqrt{2}}{2} = r_{ec}^{8} \times \frac{2}{\sqrt{2}} =$$

$$= r_{ec}^{8} \times \frac{2\sqrt{2}}{2} = r_{ec}^{8} \times \sqrt{2} \simeq 1{,}41421356\,2\ldots \times 110 \simeq \boxed{155{,}6 \text{ mm}}$$

La forma y dimensiones se representa en la figura 1.

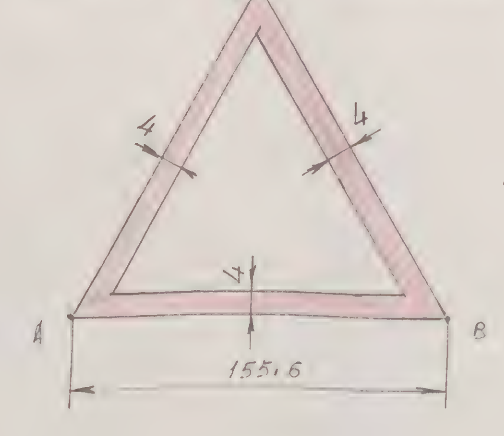


Figura 1

PIEZA Nº 1 — 8 (U)

Figura 1

PIEZA Nº 2 — UNIONES ARISTAS — 12 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_8 (ver fig. 1) $a_8 = 155{,}6$ m m. La tomamos igual a 154 m m.

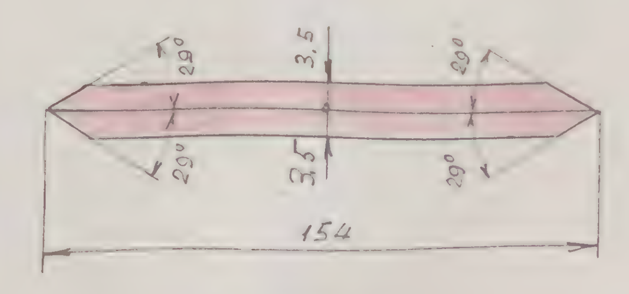


Figura 2

PIEZA Nº 2 — 12 (U)

Figura 2

UNE A 4-210 x 297

Enero 1979

OCTAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

	Ejercicio de construcción de poliedros modelos corpóreos	Modelo M - 3.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo, representado en la lámina 3 del ejercicio G. E.

DATOS: Radio "r_{ec}^{8}" de la esfera circunscrita al octaedro regular pedido.

$$r_{ec}^{8} = 76.1 \text{ mm}$$

El modelo corpóreo que se estudia es de caras vaciadas, variante del modelo M-3.1, con sus mismas dimensiones y características siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 8$
Número de vértices	$V = 6$
Número de aristas	$A = 12$
Número de caras de cada vértice	$4\ P_3$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 - CARA TRIANGULAR = 8 unidades

Es un triángulo equilátero, cuyo lado l_3 es igual a la aris-



ta "a_8" del octaedro pedido.

Su valor se obtiene despejando "a_8" de la fórmula n° del ejercicio G.E , o sea:

$$r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8 \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_8} = r_{ec}^{8} : \frac{\sqrt{2}}{2} = r_{ec}^{8} \times \sqrt{2} =$$

$$= 76,1 \times \sqrt{2} \cong 107.6216521.. \cong \boxed{107.6 \text{ mm}}$$

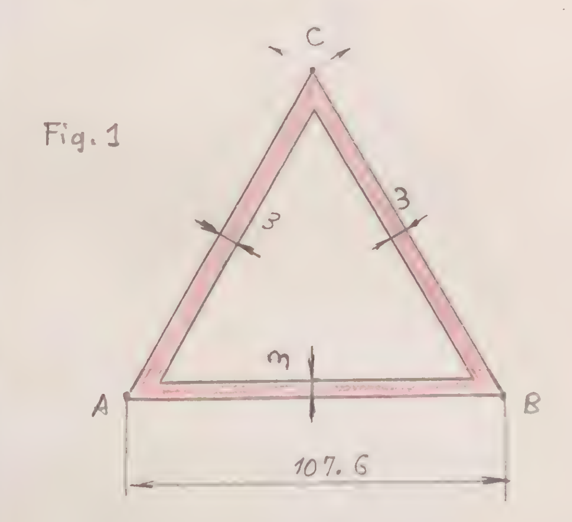


Fig. 1

PIEZA N° 1 8 (U)

Figura 1

PIEZA N° 2 - UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_8 (ver fig. 1; a_8 = 107.6 mm).- La tomamos igual a 106 mm.

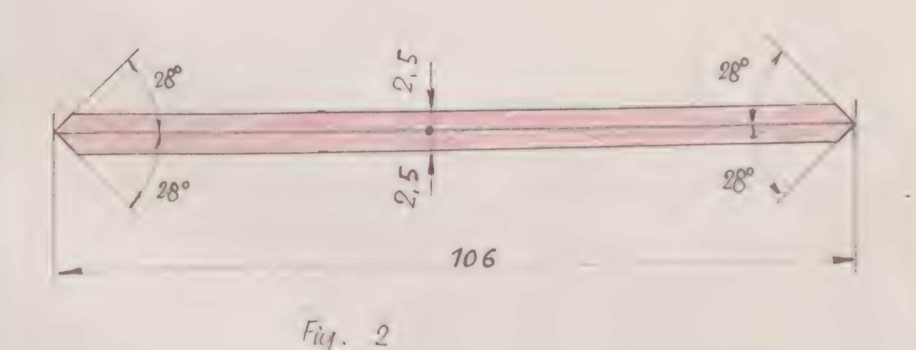


Fig. 2

PIEZA N° 2

Fig. 2

12 unidades

UNE A 4-210 x 297



PATRONES





MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS MACIZAS, OBTENIDO AL CONSTRUIR, SOBRE CADA CARA DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, Y HACIA SU EXTERIOR, UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CUYAS ARISTAS SON IGUALES A LAS DEL OCTAEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita, que pasa por los vértices de los tetraedros regulares:

$r' = 110$ mm.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo de caras macizas, obtenido al construir sobre cada cara de un octaedro regular convexo y hacia su exterior, un tetraedro regular convexo, cuyas aristas son iguales a las del octaedro generador.

Se tiene como dato único el del radio "r_{ec}^{8}" de la esfera que contiene a los vértices de los tetraedros regulares construidos sobre cada cara del octaedro generador.

DATO: Radio máximo "r_{ec}^{8}" de la esfera circunscrita al poliedro pedido:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

1) PROPIEDADES

De la definición de la generación del poliedro estudiado, enumeraremos las propiedades más importantes del mismo, algunas de las cuales son básicas para el cálculo de sus dimensiones.

P1) El poliedro se compone de ocho tetraedros regulares convexos, cuyas bases son triángulos equiláteros, (ca-



ras del octaedro generador, y sus caras laterales son también triángulos equiláteros. Estos tetraedros tienen las aristas de sus bases, comunes dos a dos.

P2) El número "C" de sus caras es:

$$C = 3 \times 8 = \underline{\underline{24 \quad (u)}}$$

El número "V" de sus vértices, es:

a) vértices de los tetraedros = 8

vértices del octaedro = 6

Total 14 (u)

El número "A" de sus aristas, es:

$$A = \frac{C \times 3}{2} = \frac{24 \times 3}{2} = \underline{\underline{36 \quad (u)}}$$

Observemos que aun siendo cóncavo este poliedro, verifica también el teorema de Euler para los convexos:

$$\boxed{C + V = A + 2 \quad " \quad 24 + 14 = 36 + 2}$$

P3) El radio "r_{ec}^{8}" de la esfera circunscrita, es igual a la suma del radio "r_{ei}^{8}" de la esfera inscrita al octaedro generador de arista "a_8", y de la altura "h_4" del tetraedro correspondiente de igual arista "a_8"; por consiguiente será:

$$\boxed{r_{ec}^{8} = r_{ei}^{8} + h_4} \qquad (1)$$



Modelo M- 3.3

P4) Todas las caras de este poliedro son iguales, en forma de triángulos equiláteros de arista "a_8" del octaedro generador.

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, vamos a hacer uso de ellas para aplicarlas al cálculo analítico de las magnitudes lineales, necesarias para la construcción del poliedro estudiado.

Como fórmulas previas, deducidas de otros ejercicios, recordemos las siguientes:

1º "h_4" = Altura de los tetraedros regulares convexos, construidos sobre cada cara del octaedro generador, de arista "a_8"

$$h_4 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_8 \qquad (2)$$

(Ver ejercicio G. E. - Lámina 1)

2º "r_{ei}^{8}" = Radio de la esfera inscrita en el octaedro regular convexo generador:

$$r_{ei}^{8} = \frac{\sqrt{6}}{6} a_8 \qquad (3)$$

(Ver ejercicio G. E. ... Lámina 3)

Alvarez Febrero 1980

UNE A4 210 x 297



Sustituyendo los valores (2) y (3) en (1), tendremos:

$$\boxed{r_{ec}^{8}} = r_{ei}^{8} + h_4 = \frac{\sqrt{6}}{6} a_8 + \frac{\sqrt{6}}{3} a_8 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) a_8 =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{6} a_8 = \frac{3\sqrt{6}}{6} a_8 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2} a_8}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{6}}{2} a_8} \qquad (4)$$

Como el dato del ejercicio es "r_{ec}^{8}", para obtener "a_8" en función de r_{ec}^{8}, despejaremos en (4) el valor de a_8, por lo que tendremos

$$\boxed{a_8} = r_{ec}^{8} : \frac{\sqrt{6}}{2} = r_{ec}^{8} \times \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} r_{ec}^{8} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{8}}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_8} = \frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{8} \cong \boxed{0.81\ 64\ 96\ 58\ 1\ldots\ r_{ec}^{8}} \qquad (5)$$

Aplicando la fórmula (5) al caso estudiado, para $r_{ec}^{8} = 110$ mm, tendremos:

$$\boxed{a_8} \cong 0.81\ 64\ 96\ 58\ 1\ldots \times 110 \cong \boxed{89.8 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:



PIEZA Nº 1 · DESARROLLO LATERAL DE CADA UNO DE LOS OCHO TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS

8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 1 8 (u)

Figura 1

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 36 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

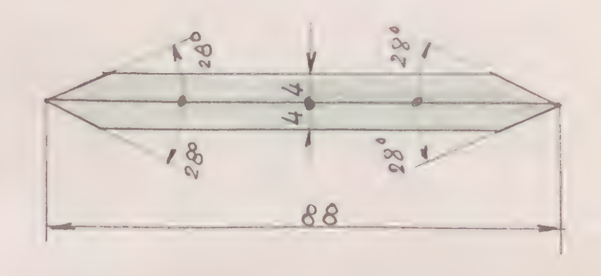


Figura 2

PIEZA Nº 2 36 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES

24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

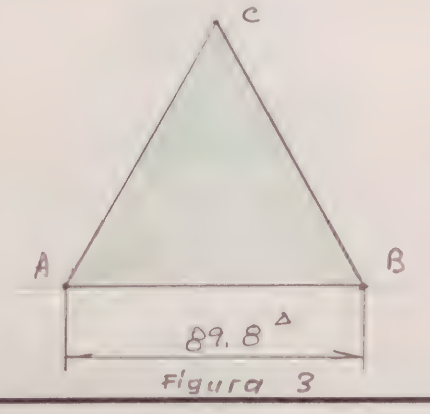


Figura 3

PIEZA Nº 3 24 (u)

Figura 3



Modelo M - 3.3

PIEZA Nº 4 REFUERZO TRASVERSAL CARAS LATERALES

24 unidades

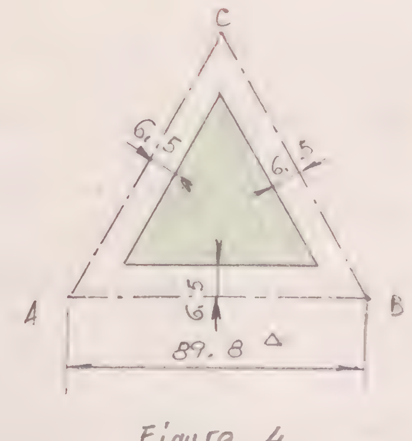


Figura 4

Su forma y dimensiones se representan en la figura 4, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3

PIEZA Nº 4 24 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES

48 unidades (simétricas 2 a 2)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

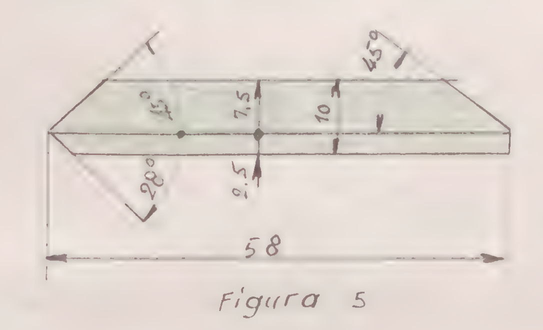


Figura 5

PIEZA Nº 5 48 (u)
simétricas 2 a 2

Figura 5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

24 unidades

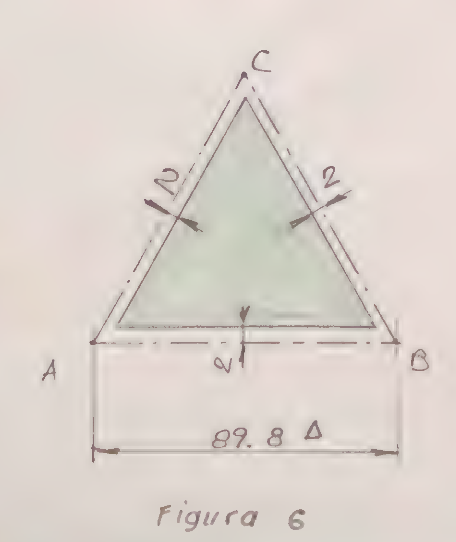


Figura 6

Su forma y dimensiones se representan en la figura 6, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3.

PIEZA Nº 6 24 (u)

Figura 6

UNE A4 210 x 297

Febrero 1960



Modelo M- 3.3

ESTUDIO COMPLEMENTADIO

El estudio de este modelo, cuya ley de generación se detalla en el enunciado, nos ha conducido a la obtención de un poliedro cóncavo, compuesto de ocho tetraedros regulares convexos acoplados por las aristas inferiores de sus bases, que son comunes dos a dos.

Las aristas de este poliedro son todas de igual longitud, e iguales a su vez a las del octaedro regular generador "a_8".

Los vértices exteriores son puntos que equidistan del centro "O" del octaedro generador (por ser la altura de los tetraedros regulares, perpendiculares a las respectivas caras del mencionado octaedro generador, y pasar por el centro de dichas caras).

Por consiguiente, dichos vértices están sobre una esfera común circunscrita al poliedro estudiado y son a su vez vértices de un exaedro regular convexo circunscrito a aquél. (El octaedro y exaedro regulares convexos, son conjugados entre sí).

En el estudio del exaedro regular convexo (Ver G.E. Lámina 2, obtuvimos la fórmula

$$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6 \qquad (1)$$

que nos da el valor de la longitud del radio "r_{ec}^{6}" de la esfera circunscrita al exaedro regular convexo, en función de

UNE A4·210 x 297



la su arista "a_6", de la cual, despejando "a_6", podemos obtener la arista en función de "r_{ec}^6".

Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_6} = r_{ec}^6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} r_{ec}^6 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6}$$

de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{a_6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6 \cong \boxed{1,15\ 47\ 00\ 53\ 9 \ldots \times r_{ec}^6}$$

que en el poliedro estudiado, será:

$$\boxed{a_6} \cong 1,15\ 47\ 00\ 53\ 9 \ldots \times 110 \cong \boxed{127 \text{ mm}}$$

Para obtener el poliedro resultante de este estudio complementario, puede utilizarse este mismo modelo M - 3.3, completándolo con las aristas "a_6" de las caras del exaedro regular convexo inscrito

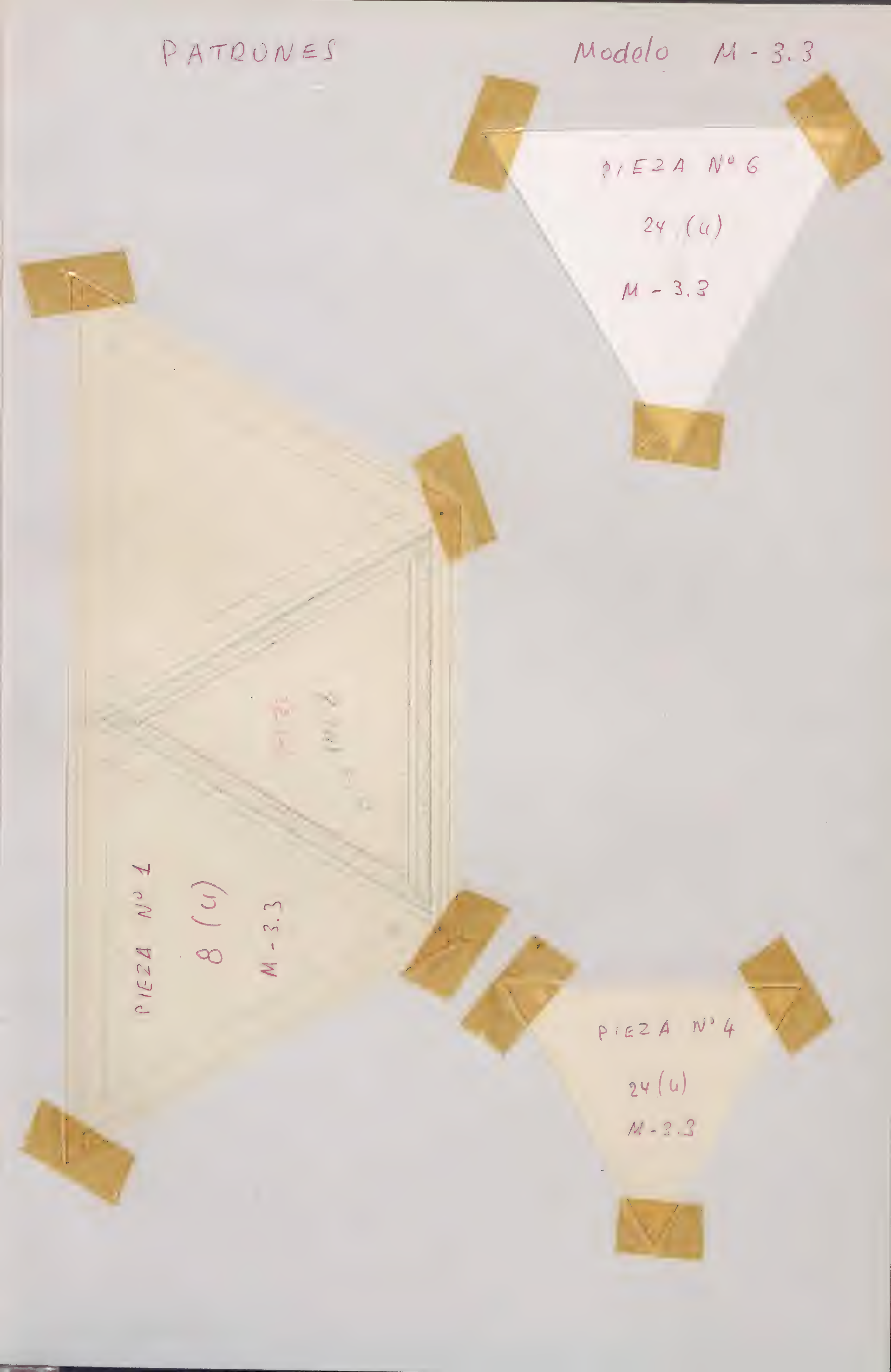
---

NOTA IMPORTANTE

Este modelo es exactamente igual al M - 12.1 obtenido como intersección de dos tetraedros regulares convexos iguales, cuyas aristas se cortan perpendicularmente en sus puntos medios. Las longitudes de las aristas de los dos tetraedros regulares generadores son el doble de las del octaedro generador de este ($a_4 = 2\ a_8$) y su esfera circunscrita es la misma.

UNE A4 210 x 297





PATRONES
Modelo M - 3.3
PIEZA Nº 6
24 (u)
M - 3.3
PIEZA Nº 1
8 (u)
M - 3.3
PIEZA Nº 4
24 (u)
M - 3.3

VARIANTE DEL POLIEDRO CÓNCAVO M-3.3, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, Y CONSTRUIDO: A) EL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS MACIZAS; Y B) EL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 mm.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-3.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del modelo M-3.3, de igual forma y dimensiones, y construido: A) El octaedro regular convexo, con sus caras macizas; y B) El tetraedro regular convexo, con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M-3.3.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS MACIZAS Y ARISTA $a_8 = 89.8$ mm

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

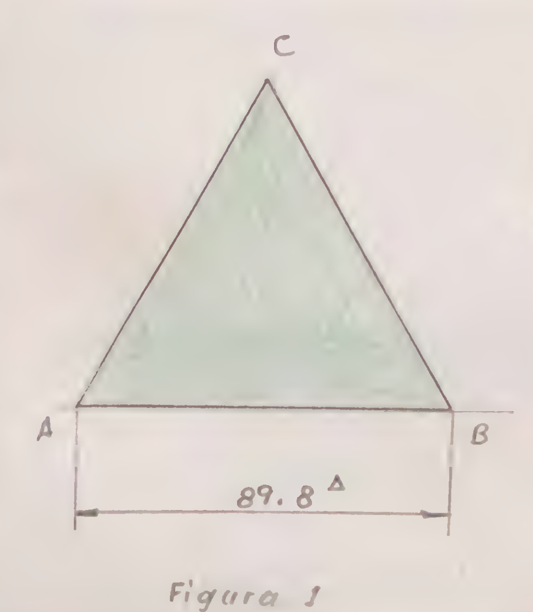


Figura 1

Son triángulos equiláteros. Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 1 8 (u)

Figura 1



PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES 8 unidades

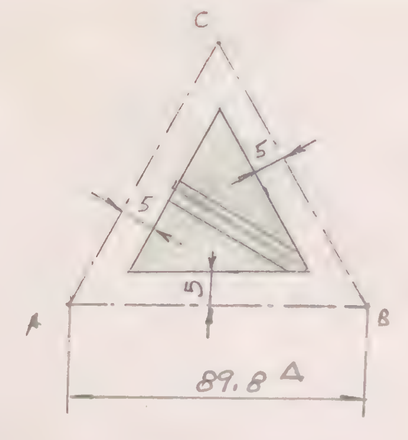


Figura 2

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 8 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES 16 unidades (simétricas 2 a 2)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

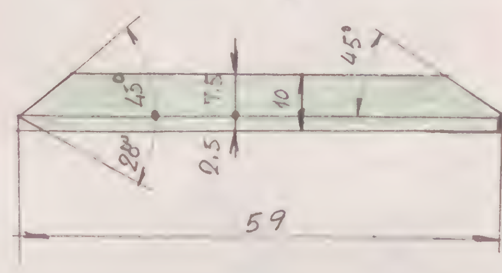


Figura 3

PIEZA Nº 3 16 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

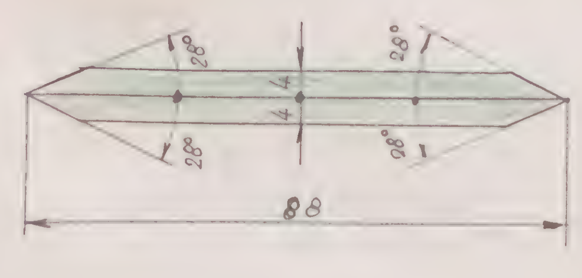


Figura 4

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4



PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 8 unidades

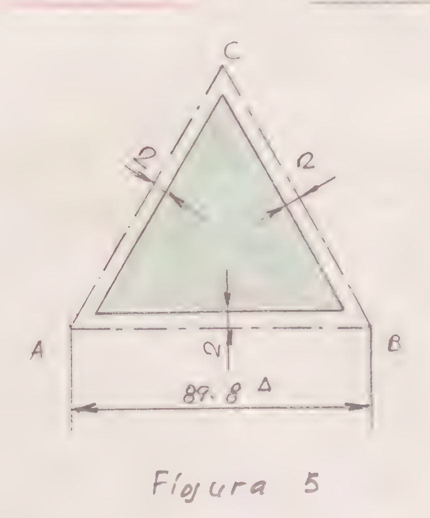


Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5 8 (4)

Figura 5

B) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS VACIADAS, DE ARISTA $a_8 = 89{,}8$ mm

PIEZA Nº 6 DESARROLLO LATERAL DEL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO 8 unidades

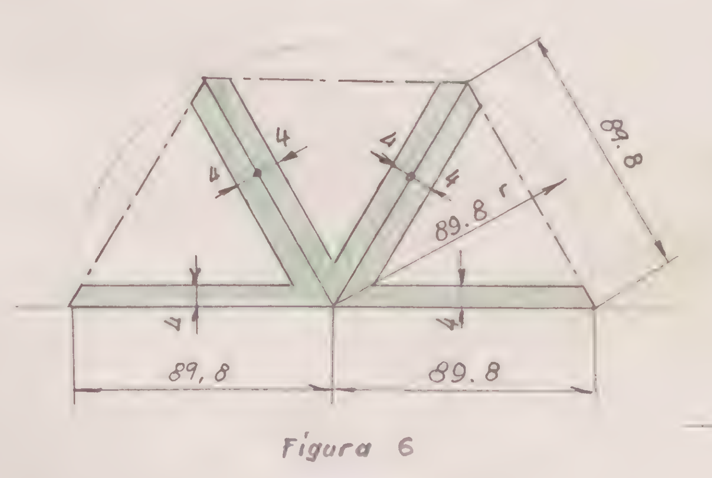


Figura 6

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 6 8 (4)

Figura 6

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

PIEZA Nº 7 24 (4)

Figura 7

29°
3
3
29°
88

Figura 7

Modelo M - 3.4

NOTA IMPORTANTE

Este modelo es exactamente igual al Modelo M- 19.1, que se obtuvo como demostración de que el sólido común de la intersección de dos tetraedros regulares convexos, iguales entre sí y conjugados por sus aristas, es un octaedro regular convexo. La arista del octaedro regular de dicho sólido común o núcleo, es la mitad de las de los tetraedros generadores.

El radio "r_{ec}" de la esfera circunscrita a los modelos corpóreos M - 19.1 y M - 3.4, son de igual longitud ($r_{ec}^4 = r_{ec}^6 = 110$ mm).

Alvarez Febrero 1980



PATRONES MODELO M - 3.4



MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS MACIZAS, OBTENIDO AL CONSTRUIR SOBRE CADA CARA DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, Y HACIA SU EXTERIOR, UN PRISMA TRIANGULAR, REGULAR RECTO, CUYA BASE ES DICHA CARA, Y SUS CARAS LATERALES SON CUADRADOS.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

[¿Enunciado?]: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo de caras macizas, obtenido al construir sobre cada cara de un octaedro regular convexo, y hacia su exterior, un prisma regular triangular recto, cuya base es dicha cara, y sus caras laterales son cuadrados.

Se tiene, como dato único el del radio "r_{ec}^{8}" de la esfera circunscrita, que contiene todos los vértices exteriores (vértices de los triángulos equiláteros de las bases del prisma opuestas a las caras del octaedro generador).

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

1) PROPIEDADES

De la definición de este poliedro, se deducen las siguientes propiedades, que enunciamos a continuación, siendo algunas de ellas, básicas para el cálculo de sus dimensiones.

P 1.) Los prismas rectos construidos sobre cada cara del octaedro generador, son de bases triangulares, equiláteros, siendo a su vez cuadradas las caras laterales; por consiguiente, dichos prismas serán rectos, triangulares, regulares y convexos, siendo sus aristas iguales a la



"a_8" del octaedro generador.

P. 2) El poliedro pedido, se compone de ocho prismas rectos triangulares, regulares y convexos, que tienen las aristas "a_8" de sus bases inferiores, comunes dos a dos.

P. 3) El número de sus caras, será:

$C_3 = 1 \times 8 = 8$ caras triangulares

$C_4 = 3 \times 8 = 24$ caras cuadradas

Total = 32 caras

El número de sus vértices, será:

En las bases superiores = $3 \times 8 = 24$

en las bases inferiores : = 6

Total = 30 vértices

El número de aristas, será:

En las bases superiores = $3 \times 8 = 24$

En las bases inferiores = $\frac{1}{2} \times 3 \times 8 = 12$

En las caras laterales = $3 \times 8 = 24$

Total = 60 aristas

En resumen, este poliedro tiene:

C = 32 caras
V = 30 vértices
A = 60 aristas

y verifica también el teorema de Euler para poliedros convexos:



		Modelo M- 3.5

$C + V = 32 + 30 = 62 = A + 2 = 60 + 2$

P. 4) La altura "h_3" del prisma recto, regular, triangular, construido sobre cada cara del octaedro generador, de arista "a_8", es:

$$\boxed{h_3 = a_8} \qquad (1)$$

P. 5) Si unimos un vértice "V" de la base superior del prisma recto anterior, con el centro "C" del triángulo de dicha base; a continuación éste con el centro "O" del octaedro generador, y finalmente "V" con "O", se nos formará el triángulo rectángulo "VCO" de ángulo recto "C" en el que la hipotenusa "$\overline{VO}$" será el radio "r_{ec}" de la esfera circunscrita al poliedro estudiado; el cateto "$\overline{VC}$" será el radio "r_{c-3}" de la circunferencia circunscrita a la cara triangular exterior; el otro cateto "$\overline{CO}$" es la suma del radio "r_{ei}^8" de la esfera inscrita en el octaedro generador, y la altura "h_3" del prisma. Así pues será:

$\overline{VO} = r_{ec}$ $\qquad \overline{VC} = r_{c-3}$ $\qquad$ y $\qquad \overline{CO} = r_{ei}^8 + h_3$

verificándose que:

$$\overline{VO}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{CO}^2 \qquad (2)$$

donde sustituyendo valores, será:



$$r_{ec} = \sqrt{(r_{c-3})^2 + (r_{ei}^{8} + h_3)^2} \qquad (3)$$

Para desarrollar la fórmula (3), sustituiremos en ella los siguientes valores en función de "a_8":

1º) "r_{c-3}" = Radio de la circunferencia circunscrita a la base triangular exterior del prisma recto, de lado $l_3 = a_8$

$$r_{c-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, a_8 \qquad (4)$$

(Ver ejercicio G.P. 1.400-42)

2º) "r_{ei}^{8}" = Radio de la esfera inscrita al octaedro generador, en función de su arista "a_8"

$$r_{ei}^{8} = \frac{\sqrt{6}}{6}\, a_8 \qquad (5)$$

(Ver ejercicio G.E. .- Lámina 3).

$$h_3 = a_8 \qquad (6)$$

(Ver fórmula (1) de este ejercicio)

Sustituyendo en (3) los valores (4), (5) y (6), tendremos:

$$r_{ec} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\, a_8\right)^2 + \left[\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\, a_8 + a_8\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left[\frac{\sqrt{6}}{6} + 1\right]^2}\; a_8 =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{9} + \left[\frac{6}{36} + 1 + \frac{2\sqrt{6}}{6}\right]}\; a_8 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}\; a_8 = \sqrt{\frac{2 + 1 + 6 + 2\sqrt{6}}{6}}\; a_8 =$$



Modelo M-3.5

$$= \sqrt{\frac{9+2\sqrt{6}}{6}}\, a_8$$

de donde se obtiene finalmente:

$$r_{ec} = \sqrt{\frac{9+2\sqrt{6}}{6}}\, a_8 \qquad (7)$$

Despejando en la fórmula (7) el valor de "a_8", tendremos:

$$a_8 = r_{ec} : \sqrt{\frac{9+2\sqrt{6}}{6}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9+2\sqrt{6}}{6}}} \times r_{ec} = \sqrt{\frac{6}{9+2\sqrt{6}}}\, r_{ec} =$$

$$= \sqrt{\frac{6\times(9-2\sqrt{6})}{81-24}}\, r_{ec} = \sqrt{\frac{6\times(9-2\sqrt{6})}{57}}\, r_{ec} = \sqrt{\frac{2\times(9-2\sqrt{6})}{19}}\, r_{ec} = \sqrt{\frac{18-4\sqrt{6}}{19}}\, r_{ec} \cong$$

$$\cong 0{,}65\ 70\ 28\ 43\ 9\ldots \times r_{ec} \qquad (8)$$

Fórmula (8) que nos permite calcular la arista "a_8" del poliedro estudiado (que es a su vez la arista del octaedro generador), en función del radio "r_{ec}" de la esfera circunscrita a aquél (r_{ec} = 110 mm). Con ello podemos construir los polígonos que forman sus caras (triángulos equiláteros y cuadrados de igual lado; $l_3 = l_4 = a_8$).

En el modelo estudiado, será:

$$a_8 = \sqrt{\frac{18-4\sqrt{6}}{19}}\, r_{ec} \cong 0{,}65\ 70\ 28\ 43\ 9\ldots \times 110 = 72{,}3 \text{ mm}$$

Dicho modelo, de caras macizas, se compondrá de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO LATERAL Y BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

UNE A4 210 x 297

Calvario Febrero 1980



Modelo M-3.5

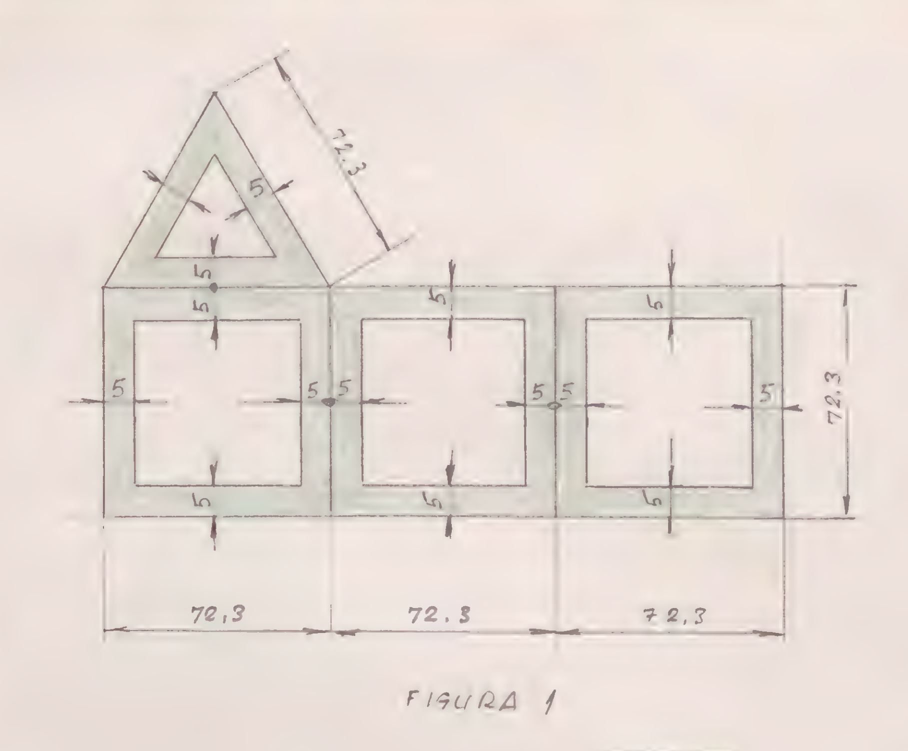


FIGURA 1

PIEZA Nº 1

8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

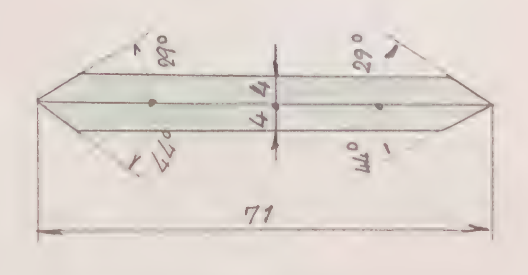


FIGURA 2

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 24 unidades

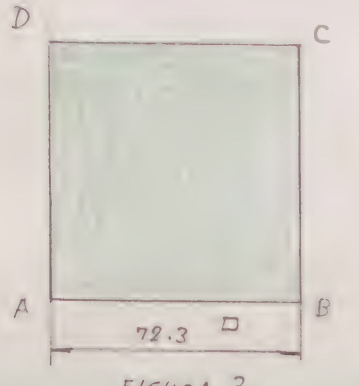


FIGURA 3

Son cuadrados, cuya forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

PIEZA Nº 3 24 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Talavera Febrero 1980



Modelo M- 3.5

PIEZA Nº 4 FONDO MACIZO DE LA BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 8 unidades

Es un triángulo equilátero, cuya forma y dimensiones se detalla en la figura 4

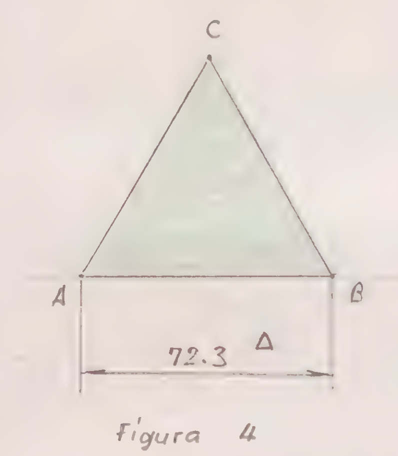


Figura 4

PIEZA Nº4 8 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR.

24 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 3, y se detallan en la figura 5

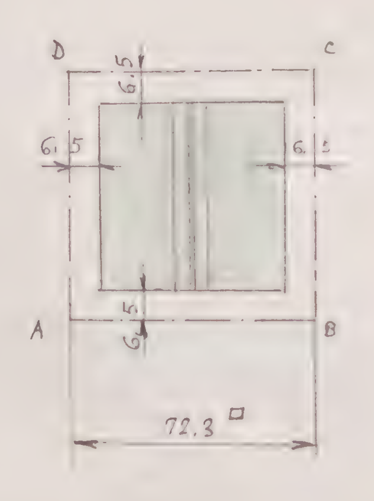


Figura 5

PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 5



Modelo M - 3.5

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 48 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación en la figura 5.

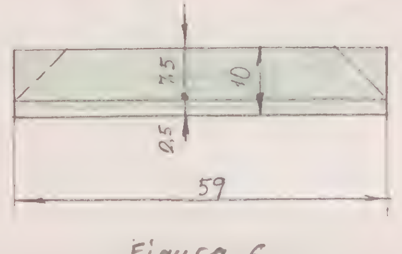


Figura 6

PIEZA Nº 6 48 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LA BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 8 unidades

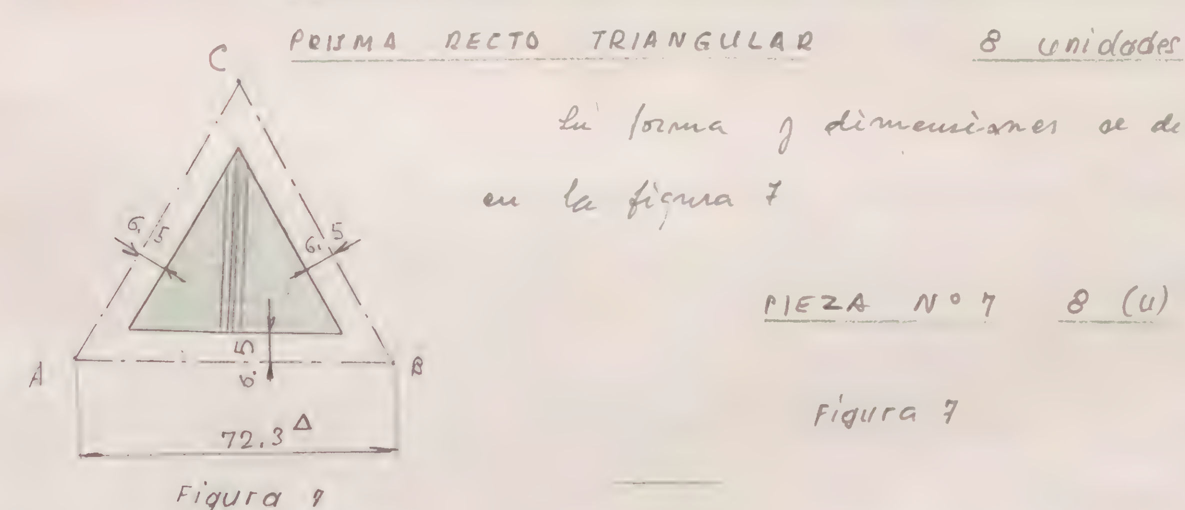


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

PIEZA Nº 7 8 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LA BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR

16 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8, y su colocación en la fig. 7

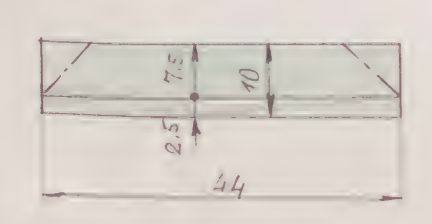


Figura 8

PIEZA Nº 8 16 (u)

Figura 8

Calvarro Febrero 1980



Modelo M-3.5

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 24 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 8, y se detallan en la figura 9

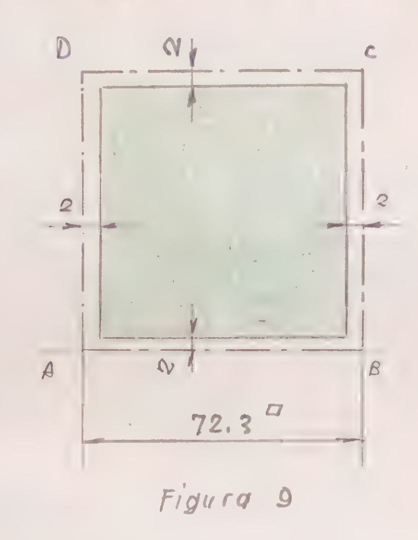


Figura 9

PIEZA Nº 9 24 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN LA BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 8 unidades

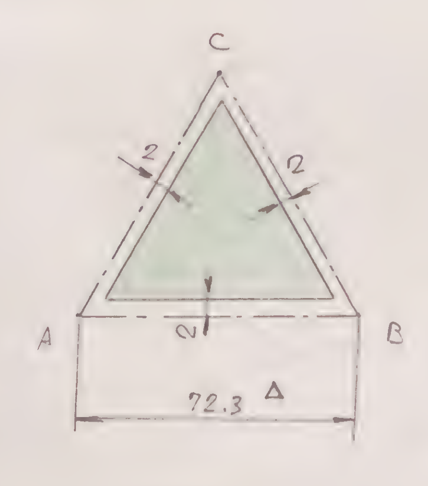


Figura 10

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 10

PIEZA Nº 10 8 (u)

Figura 10

UNE A4 210 x 297

Alvarez Febrero 1980



ESTUDIO COMPLEMENTARIO

El estudio de este modelo, cuya ley de generación se detalla en su enunciado, nos ha conducido a la obtención de un poliedro cóncavo, compuesto de ocho prismas rectos triangulares, regulares, acoplados por las aristas inferiores de sus bases, que son comunes dos a dos.

Las aristas de este poliedro, todas de igual longitud, e iguales a las del octaedro regular convexo generador "a_8" son de dos clases. En la primera se incluyen las correspondientes a las dos bases de cada prisma triangular, y en la segunda, las de las caras laterales de dichos prismas.

En cada arista de las bases superiores, concurren una cara triangular (la propia base superior) y otra cuadrada (cara lateral del prisma), perpendiculares entre sí. En cada arista de las bases inferiores, concurren dos caras cuadradas, y el diedro "2β", formado por ellas, es suplementario al diedro "2φ" de dos caras contiguas del octaedro generador, ya que los respectivos lados de sus rectilíneos correspondientes, son perpendiculares entre sí, por ser las caras laterales de los prismas triangulares, perpendiculares a las del octaedro generador.

Si unimos ahora convenientemente dos a dos los vértices de los triángulos de las bases superiores de los prismas triangulares obtendremos seis caras cuadradas iguales, asociadas a cada vértice del octaedro generador, y otras doce caras rectangulares asociadas a cada arista del mencionado octaedro ge-



nerador.

Estas nuevas caras, juntamente con las de las bases superiores de los prismas triangulares, forman un poliedro convexo de las siguientes características:

a) Caras triangulares regulares = 8

b) Caras cuadradas = 6

c) Caras rectangulares = 12

Total = 26 caras

d) Aristas de las caras a) = $\frac{8 \times 3}{2}$ = 12

e) Aristas de las caras b) = $\frac{6 \times 4}{2}$ = 12

f) Aristas de las caras c) = $\frac{12 \times 4}{2}$ = 24

Total = 48 aristas

g) Vértices = 8 × 3 = 24 vértices

Verificándose el teorema de Euler para los poliedros convexos

$C + V = A + 2 \qquad 26 + 24 = 48 + 2 = 50$

Las caras cuadradas tienen su lado l_4 de mayor longitud que la de la arista a_8 del octaedro generador

$$l_4 > a_8 \qquad (1)$$



las caras rectangulares tienen dos de sus lados iguales a las aristas a_8 (los correspondientes a las caras contiguas a las bases superiores de los prismas triangulares); y los otros dos, iguales a $l_4 > a_8$ (los correspondientes a las caras contiguas cuadradas).

La longitud de la arista "l_4", se deduce del cálculo siguiente, basado en las consideraciones anteriores.

En efecto: Consideremos la sección recta producida por un plano perpendicular a una arista cualquiera de las bases inferiores del prisma triangular regular, y dada en el extremo de dicha arista.

Esta sección se detalla en la figura 11, en la que aparece el ángulo rectilíneo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del octaedro generador, y las dos aristas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, de dos prismas triangulares regulares que forman el ángulo "2β", rectilíneo de dicho diedro suplementario del "2φ".

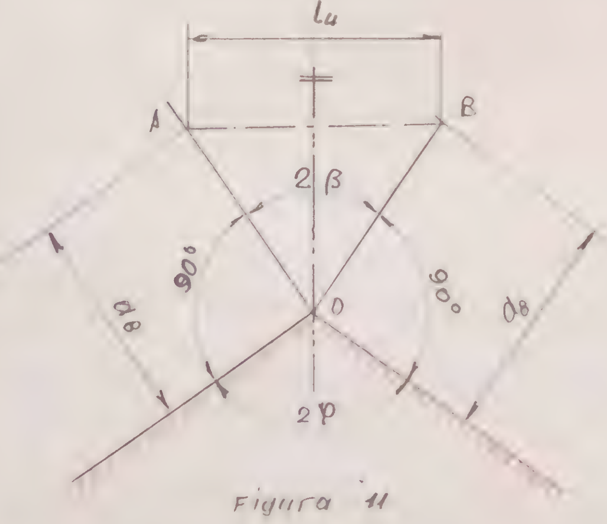


Figura 11

Si tomamos ahora las longitudes: $\overline{OA} = \overline{OB} = a_8$, el segmento $\overline{AB}$, será el lado "l_4" de las caras rectangulares, y al mismo tiempo igual al lado mayor de las caras rectangulares (ver fórmula (1)).



En el estudio del octaedro regular convexo (ver Lámina [illegible]), obtuvimos el valor del ángulo φ por la siguiente fórmula:

$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$ y de aquí:

$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{6}}{3} = 54°,73\,56\,10\,33$ de donde

$2\varphi = 109°,47\,12\,20\,7 = 109°\,28'\,16'',39\,45\,2$ de donde

$2\beta = 180° - 2\varphi = 180° - 109°,47\,12\,20\,7 = 70°,52\,87\,79\,30$ y de aquí

$\beta = 35°,26\,43\,89\,65 = 35°\,15'\,51'',80\,2$[illegible]

De la figura 11, se deduce:

$\boxed{\overline{AB}} = 2 \times (\overline{AO} \operatorname{sen} \beta) = 2 \operatorname{sen} \beta\; a_8 = 2 \times 0,57\,73\,50\,26\,9 \times a_8 =$

$= \boxed{1,15\,47\,00\,53\,8 \ldots \times a_8} = 1.15\,47\,00\,53\,8 \times 0.75\,77\,53\,73\,1.. \times 110 =$

$= 0.87\,49\,78\,64\,1.. \times 110 = \boxed{96.2 \text{ mm}}$ por lo que tendremos finalmente:

$$\boxed{\overline{AB} = l_4 = 1.15\,47\,00\,53\,8 \ldots a_8} \qquad (2)$$

De la fórmula (2) se deduce que la arista l_4 es mayor que la a_8 (aproximadamente un 15% de a_8)

El modelo corpóreo del poliedro convexo que se obtendría como consecuencia de este estudio complementario, podría parecer, en principio, igual al desarrollado en el estudio del Arquime-



diano V (lámina 37) compuesto de:

(1) 8 caras triangulares equiláteras

(2) 18 caras cuadradas

(3) 24 vértices

(4) 48 aristas

y concurren en cada vértice: $1\,C_3 + 3\,C_4$

Las condiciones (1), (3) y (4) se cumplen en el poliedro estudiado, pero no la (2), en el que existen 6 caras cuadradas de lado $l_4 > a_8$ y 12 caras rectangulares de lados a_8 y l_4 por lo que las 6 caras cuadradas son mayores que las de (2).

Tampoco son iguales entre sí todas las aristas (unas tienen la longitud de a_8 y otras la de $l_4 > a_8$.

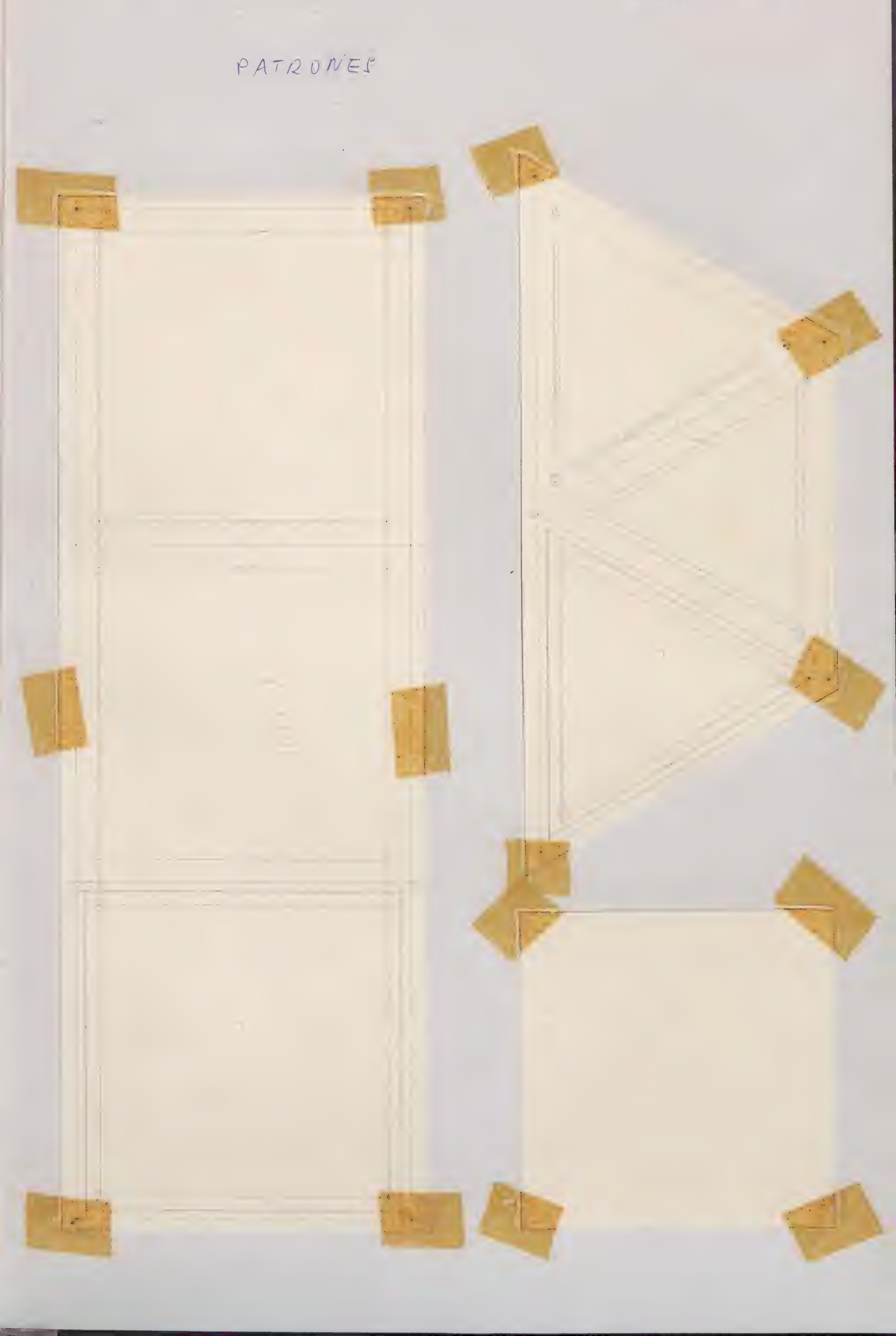
En resumen el poliedro estudiado en este estudio complementario "no es un Arquimediano V", aun cuando puede ser confundido a primera vista con éste.

Para obtener este poliedro, puede utilizarse este mismo modelo M-3.5, completándolo con las aristas $l_4 = 96{,}2$ mm, de las caras rectangulares, que es lo que hemos realizado en dicho modelo corpóreo.

Talavera Febrero 1980

Modelo M-3.5

PATRONES



EJECUTADO

VARIANTE DEL POLIEDRO CÓNCAVO M-3.5, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, Y CONSTRUIDO: A) EL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON SUS CARAS MACIZAS, Y B) EL PRISMA RECTO TRIANGULAR REGULAR, CON SUS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 m m.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 3.6

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del poliedro cóncavo M - 3.5, de igual forma y dimensiones, y construido: A) El octaedro regular convexo generador, con sus caras macizas; y B) El prisma recto regular, con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M - 3.5.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, DE CARAS MACIZAS Y ARISTA DE 72.3 mm

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Son triángulos equiláteros; su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

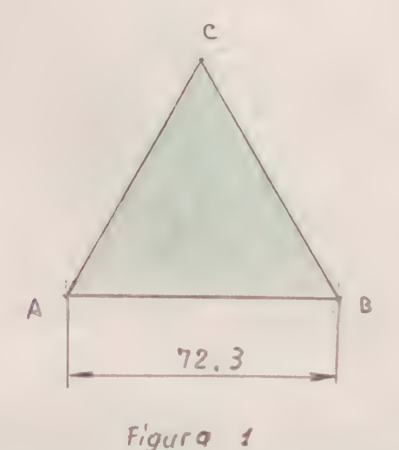


Figura 1

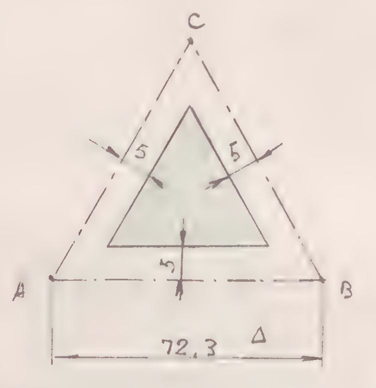
PIEZA Nº 1 8 (u)

Figura 1

Modelo M - 3.6

PIEZA Nº 2 - REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2



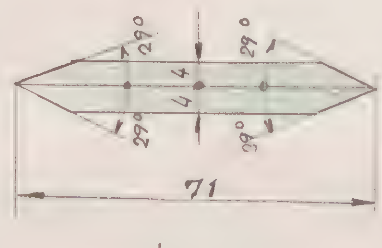
PIEZA Nº 2 8 (u)

Figura 2

Figura 2

PIEZA N 3 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3



PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 FORRO COLOREADO 12 unidades



Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

Figura 4

UNE A4 210 x 297

[signature] Febrero 1980



		Modelo M-3.6

B) PRISMA TRIANGULAR RECTO DE CARAS LATERALES CUADRADAS, CON SUS CARAS VACIADAS, DE ARISTA $a_3 = 83.4$ mm.

PIEZA Nº 5 DESARROLLO LATERAL Y BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5

8 (u)

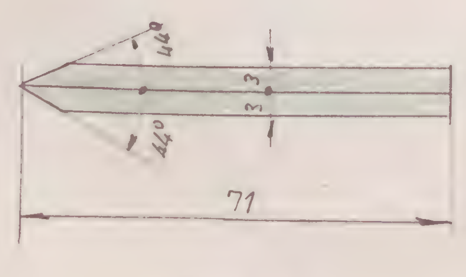
Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES

24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



PIEZA Nº 6 24 (u)

Figura 6

Figura 6

UNE A4 210 x 297

Febrero 1970



Modelo N - 3.6

PIEZA Nº 7 " UNIONES ARISTAS EN BASES SUPERIORES

24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

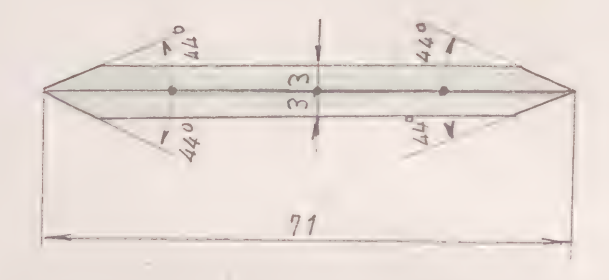


Figura 7

PIEZA Nº 7

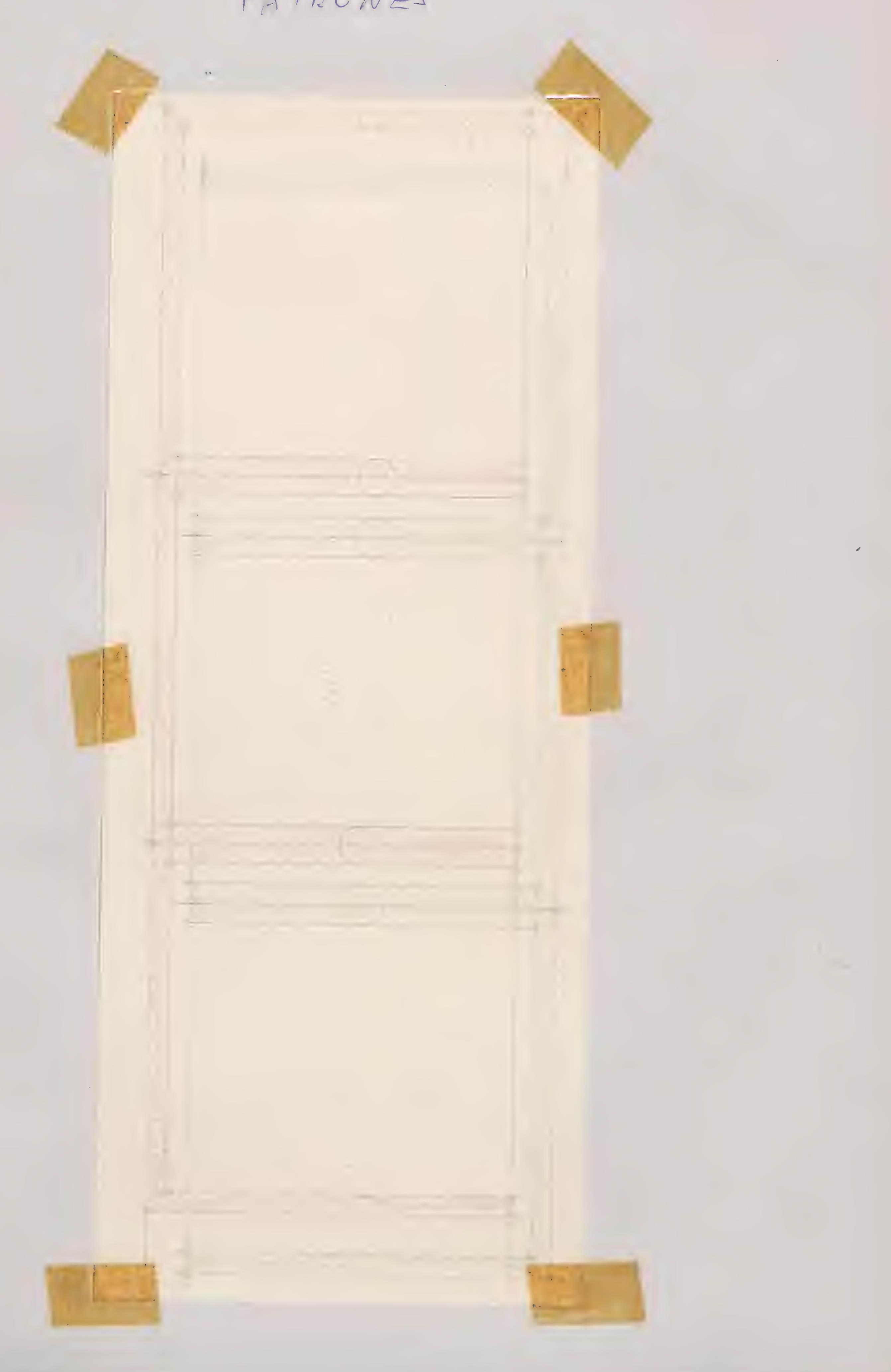
24 (u)

Figura 7



Modelo M-3.6

PATRONES



MODELO CORPÓREO DEL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE ARISTA "a_4" A LA DISTANCIA $x = \frac{1}{2} a_4$, SIENDO $a_8' = \frac{1}{2} a_4$ LA LONGITUD DE LA ARISTA DEL OCTAEDRO GENERADO.- EL TETRAEDRO GENERADOR SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS VACIADAS, Y EL OCTAEDRO GENERADO, CON LAS CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro generador:

$$r_{e_c}^{4} = 110 \text{ mm}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo n.º 3.7

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo, obtenido por truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo generador, de arista "a_4", a la distancia $x = \frac{1}{2} a_4$, siendo $a_8 = \frac{1}{2} a_4$ la longitud de la arista del octaedro generado.- El tetraedro generador, se construirá con las caras vaciadas, y el octaedro generado, con las caras macizas.

NOTA: Este modelo es igual al M-1.3, por lo que no se ha repetido su ejecución.

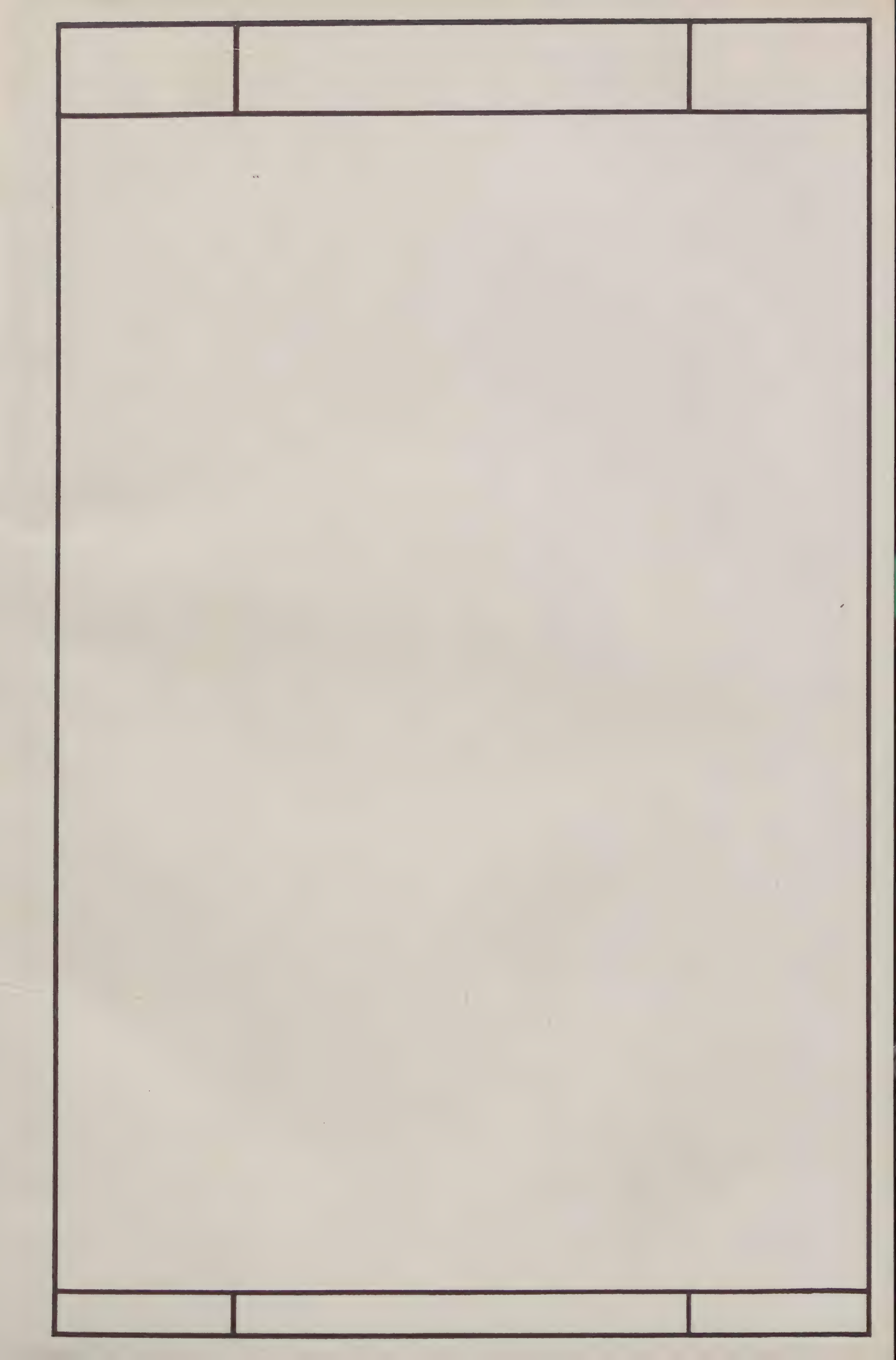
DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$\Gamma_{ec}^{4} = 110 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

(firma) · Marzo 1981





MODEO CORPÓREO DEL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE ARISTA "a_6", A LA DISTANCIA "$x = a_6$", SIENDO LA LONGITUD DE LA ARISTA DEL OCTAEDRO GENERADO "$a'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6$".- EL OCTAEDRO GENERADO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL EXAEDRO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al exaedro generador:

$$r_{ec}^{6} = 110 \text{ m m.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-3.8

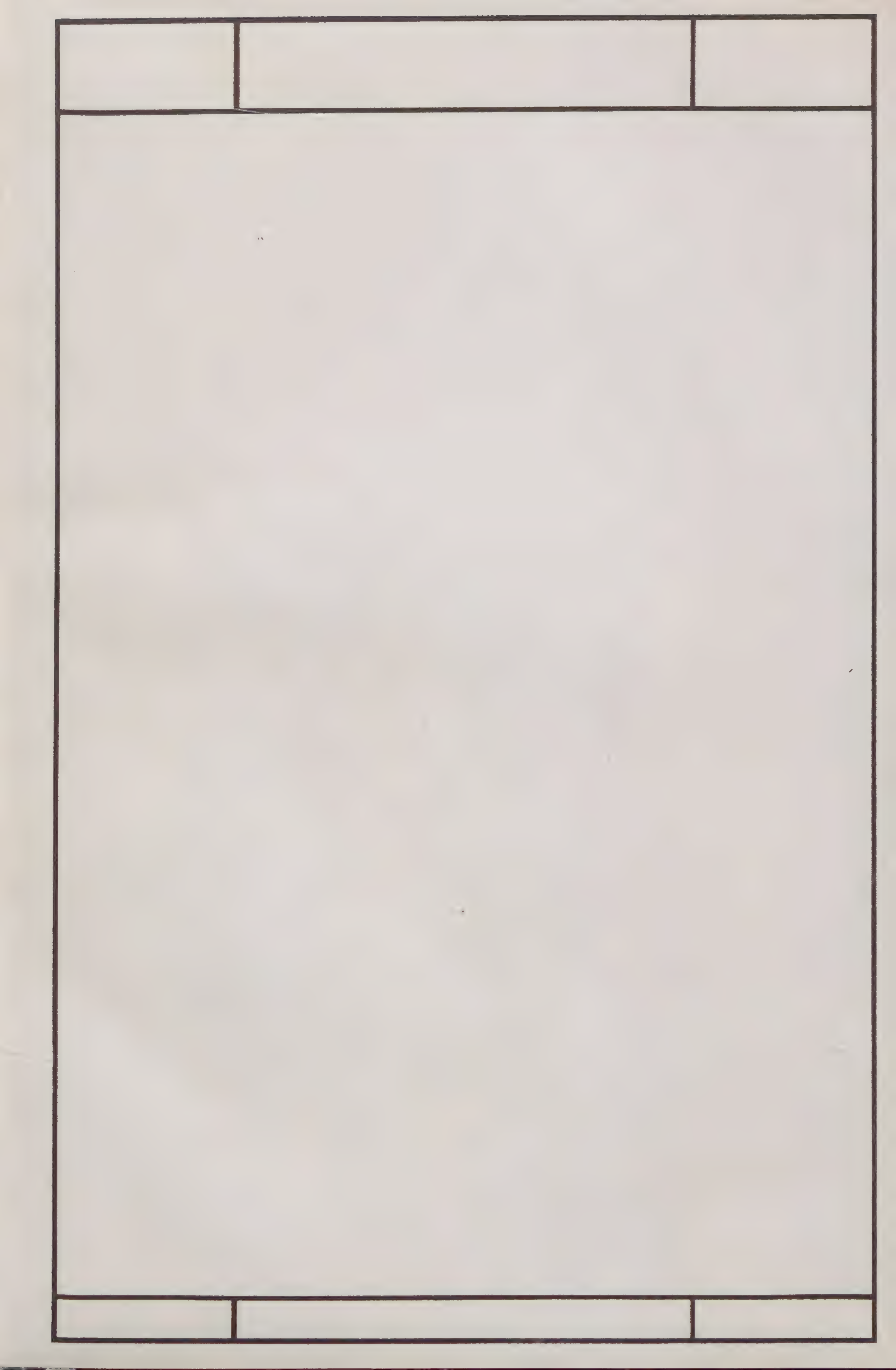
ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo, obtenido por truncadura de vértices de un exaedro regular convexo generador, de arista "a_6", a la distancia "$x = a_6$", siendo la longitud de la arista del octaedro generado, "$a'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6$".- El octaedro generado, se construirá con las caras macizas, y el exaedro generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r^6_{ec} = 110 \text{ mm}$$

NOTA.- Este modelo es igual al M-7.2, por lo que no se ha repetido su ejecución





	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4.1

DODECAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular convexo, representado en la lámina 4 del ejercicio G.E.

DATOS: Radio "r_{ec}^{12}" de la esfera circunscrita al dodecaedro regular pedido:

$$r_{ec}^{12} = 76.1 \ mm$$

Las características del dodecaedro regular convexo, son las siguientes:

Número de caras pentagonales	$C_5 = 12$
Número de vértices	$V = 20$
Número de aristas	$A = 30$
Número de caras en cada vértice	$3 \ P_5$

• El modelo corpóreo que se estudia es de caras macizas

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARA PENTAGONAL 12 unidades

Es un pentágono regular convexo, cuyo lado l_5 es igual a la



arista a_{12} del dodecaedro pedido.

Su valor se obtiene despejando a_{12} de la fórmula nº del ejercicio G.E. , o sea

$$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, a_{12} \quad \text{"} \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} =$$

$$= r_{ec}^{12} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} \cong 76{,}1 \times 0{,}71\,36\,44\,17\,9\ldots \cong 54{,}30\,83\,22\,02\ldots \cong$$

$$\cong \boxed{54{,}3 \text{ mm}}$$

El radio "r_{c-5}" de la circunferencia circunscrita al pentágono de una cara del dodecaedro regular pedido, cuyo lado $l_5 = a_{12}$, será: (ver fórm. 11 del ejercicio G.P. 1.400-44)

$$\boxed{r_{c-5}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_5 \cong 0{,}85\,06\,50\,80\,8\ldots \times 54{,}3 \cong 46{,}19\,74\,18\,04 \cong \boxed{46{,}2 \text{ mm}}$$

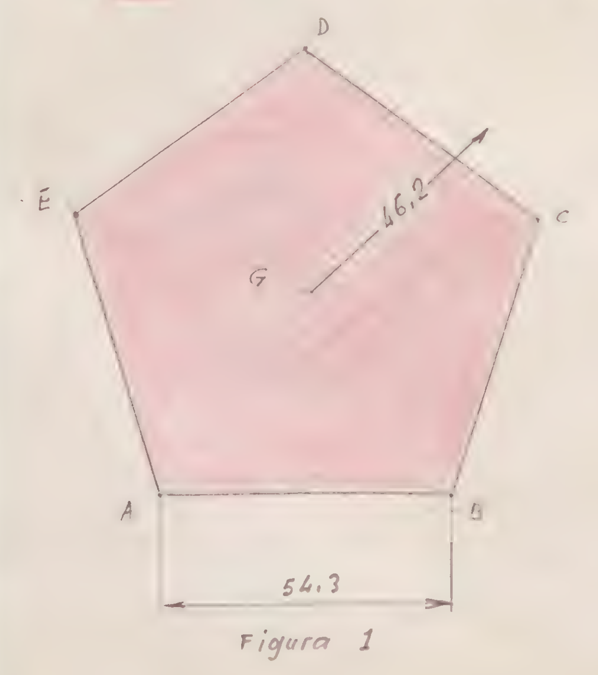


Figura 1

PIEZA Nº 1 12 (1)

Fig. 1

UNE A 4-210 x 297



PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 12 unidades

Es un pentágono regular convexo, cuyo lado l_5 se deduce del pentágono ABCDE de la figura 1 (pentágono FGHIJ de la figura 2).

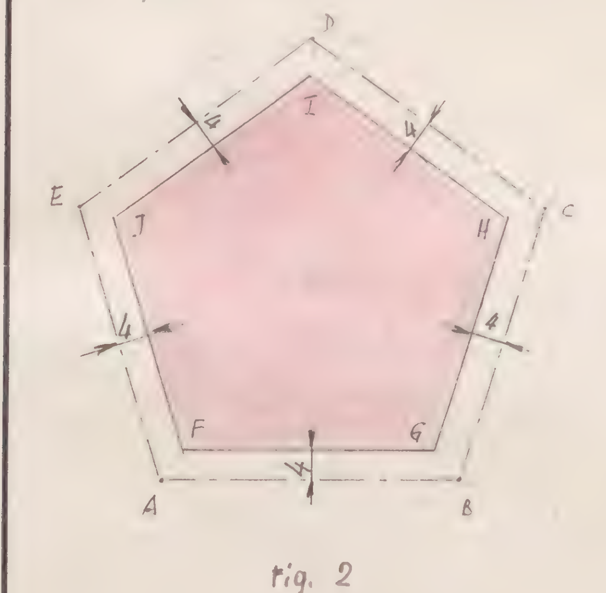


fig. 2

PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 36 unidades (simétricas 2 a 2)

12 (u) Tipo B

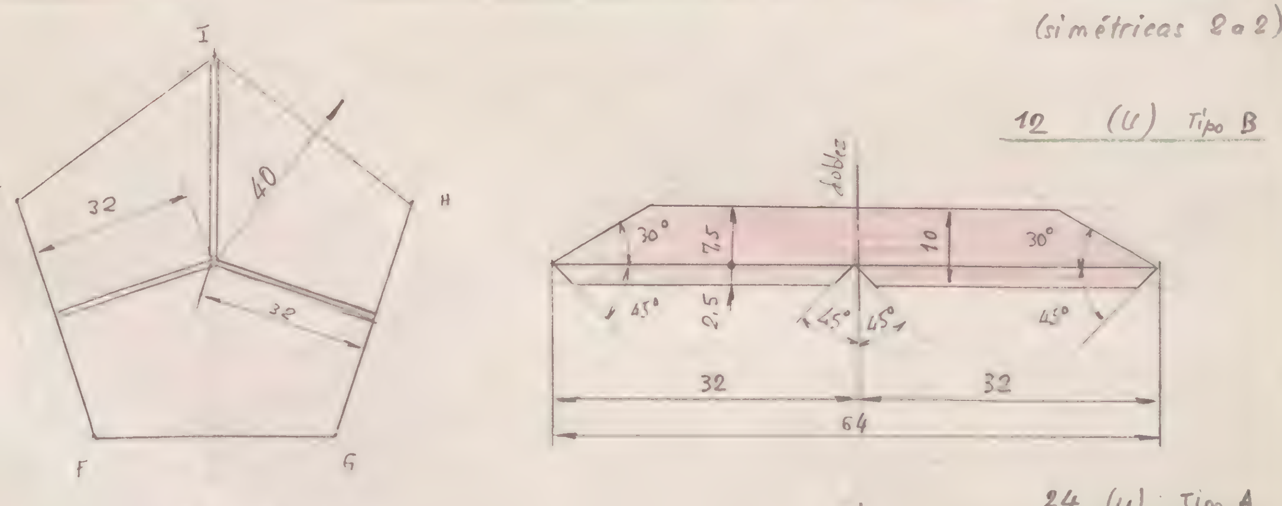


Fig. 3

Octubre 1978



Modelo M.- 4.1

PIEZA Nº 4 — UNIONES ARISTAS — 30 unidades

La longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_{12} (ver fig. 1; a_{12} = 54.3 mm).- La tomamos igual 53 mm

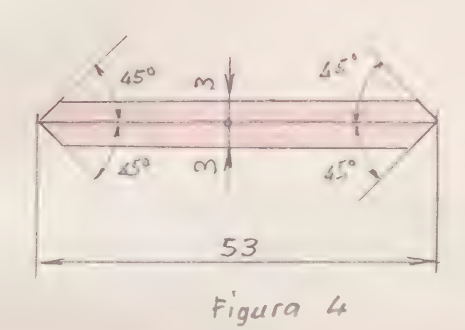


Figura 4

PIEZA Nº 4 30 (u)

Fig. 4

PIEZA Nº 5 — FORRO COLOREADO — 12 unidades

Es un pentágono regular convexo, cuyo lado l_5 se deduce del pentágono ABCDE de la fig. 1 (pentágono FGHIJ de la fig. 5).



Figura 5

PIEZA Nº 5 12 (u)

Fig. 5

UNE A 4-210 x 297



PATRONES

M-4.1



DODECAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

ENUNCIADO: " Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular convexo representado en la lámina nº 4 del ejercicio G.E.

DATO: Radio " r_{ec}^{12} " de la esfera circunscrita al dodecaedro regular pedido:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm}$$

Las características del dodecaedro regular convexo son las siguientes:

Número de caras pentagonales	$C_5 = 12$
Número de vértices	$V = 20$
Número de aristas	$V = 30$
Número de caras en cada vértice:	$3\ P_5$

El modelo corpóreo que se estudia es de caras macizas

Para la construcción de este poliedro, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Son pentágonos regulares convexos, cuyo lado " l_5 " es igual



Modelo M-4.101

arista "a_{12}" del dodecaedro pedido.

Su valor se obtiene despejando a_{12} de la fórmula nº del ejercicio G.E. , o sea:

$$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, a_{12} \qquad \text{de donde} \qquad \boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{12} \cong 0{,}71\,36\,44\,17\,9\ldots \times 110 \cong 78{,}50\,08\,59\,72 \cong \boxed{78.5 \text{ mm}}$$

El radio "$r_{c\text{-}5}$" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular convexo de una cara lateral, cuyo lado $l_5 = a_{12}$, será: (ver fórmula 11 del ejercicio G.P. 1.400-44)

$$\boxed{r_{c\text{-}5}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_5 = 0{,}85\,06\,50\,80\,8\ldots \times 78{,}50\,08\,59\,72\ldots \cong \boxed{66.8 \text{ mm}}$$

La forma y dimensiones de esta pieza nº 1, se representan en la figura 1

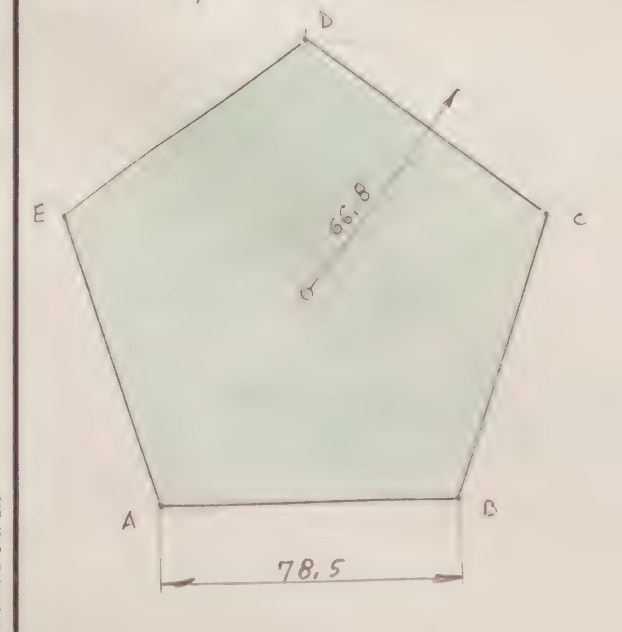


Figura 1

PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 1

UNE A 4-210 x 297



Modelo M - 4.101

PIEZA Nº 2 . REFUERZO NORMAL INTERIOR 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2, y se deducen de las del pentágono ABCDEA de la figura 1

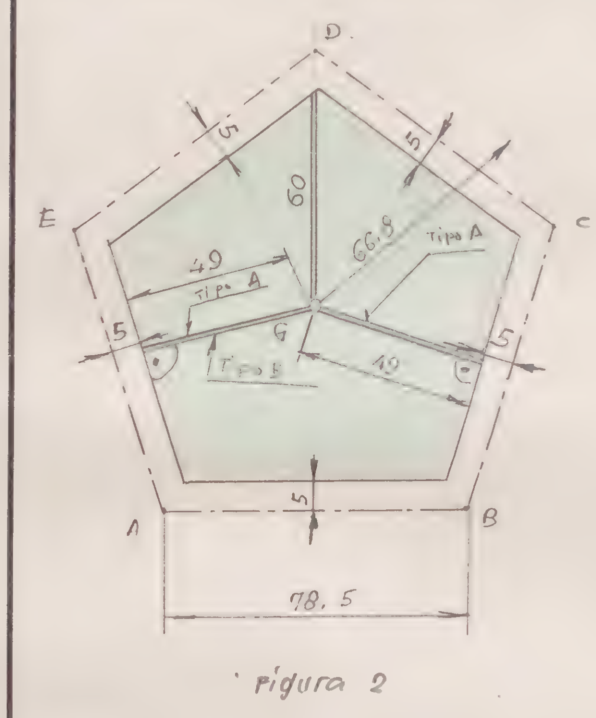


Figura 2

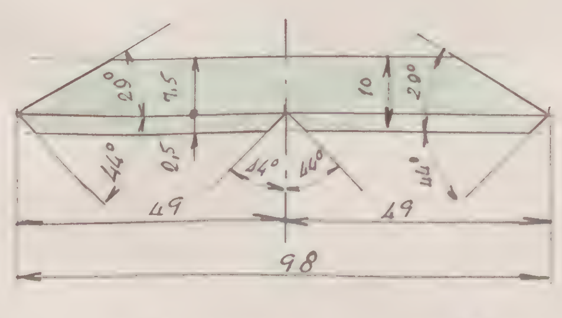
PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 36 unidades

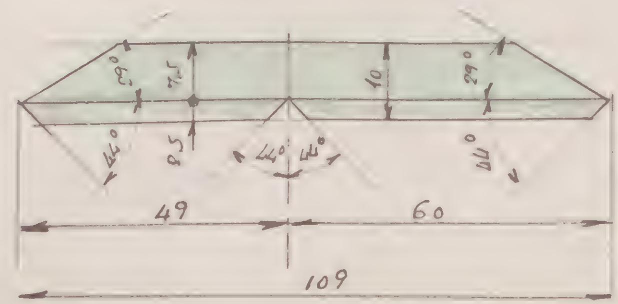
(12 tipo B y 24 tipo A) (simétricas 2 a 2)

Figura 3



PIEZA Nº 3 Tipo B

12 (u) simétricas 2 a 2



PIEZA Nº3 Tipo A

24 (u) simétricas 2 a 2

UNE A 4-210 x 297

Enero 1979



PIEZA Nº 4" UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_{12} (ver fig. 1) a_{12} = 78.5 mm - La tomamos igual a 77 mm

PIEZA Nº 4 30 (u)

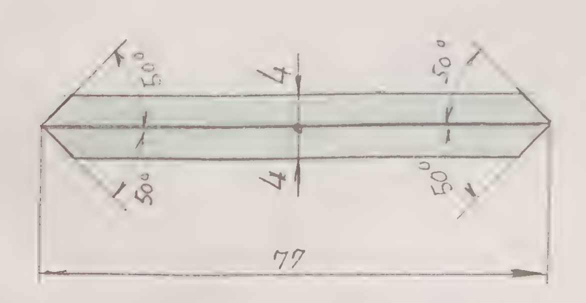
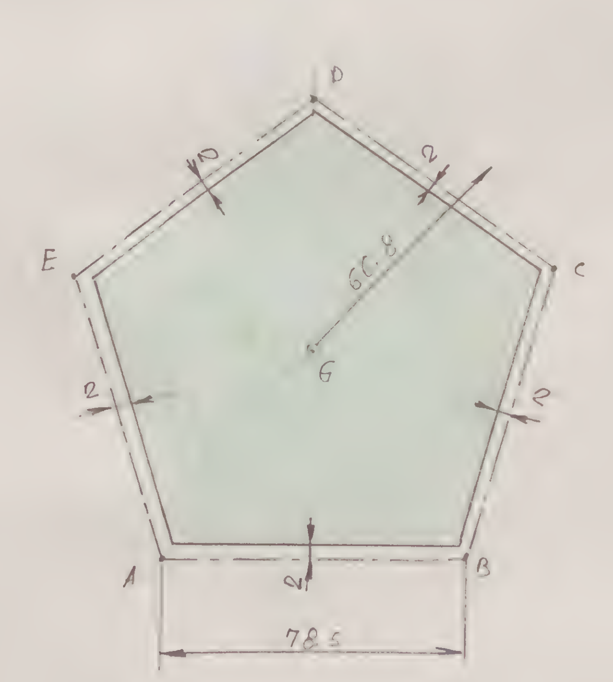


Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 12 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 5, y se deducen de las del pentágono regular ABCDEA de la figura 1



PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 5

Figura 5

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4102

DODECAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

UNE A 4-210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 4.102

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular convexo, representado en la lámina 5 del ejercicio E. E.

DATO: Radio "r_{ec}^{12}" de la esfera circunscrita al dodecaedro regular pedido

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm}$$

El modelo corpóreo que se estudia es de caras vaciadas, variante del modelo M - 4.101, con las mismas dimensiones y características siguientes:

Número de caras pentagonales	$C_5 = 12$
Número de vértices	$V = 20$
Número de aristas	$A = 30$
Número de caras en cada vértice	$3\ P_5$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 — CARAS SUPERFICIALES — 12 unidades

Son pentágonos regulares convexos, cuyo lado "l_5" es igual a la arista a_{12} del dodecaedro pedido.

UNE A 4-210 x 297

[signature] Enero 1979

Su valor se obtiene despejando a_{12} de la fórmula nº del ejercicio 110 G.E. , o sea:

$$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, a_{12} \qquad \text{de donde} \qquad \boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{12} = 0{,}71\,36\,44\,17\,9\ldots \times 110 \cong 78{,}50\,08\,59\,72 \cong \boxed{78{,}5 \text{ mm}}$$

El radio "r_{c-5}" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular convexo de una cara lateral, cuyo lado $l_5 = a_{12}$, será: (ver fórmula 11 del ejercicio G.P. 1.400-44)

$$\boxed{r_{c-5}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_5 = 0{,}85\,06\,50\,80\,8\ldots \times 78{,}50\,08\,59\,72 \cong \boxed{66{,}8 \text{ mm.}}$$

La forma y dimensiones de esta pieza nº 1 se representa en la figura 1

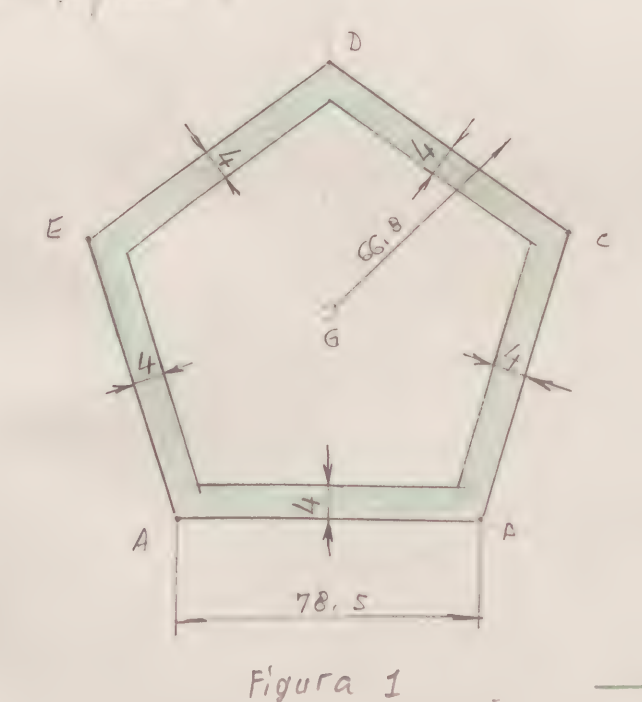


Figura 1

PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_{12} (ver



fig. 2) a_{12} = 78.5 m m. La tomaremos igual a 77 m m.

PIEZA Nº 2 30 (u)

Figura 2

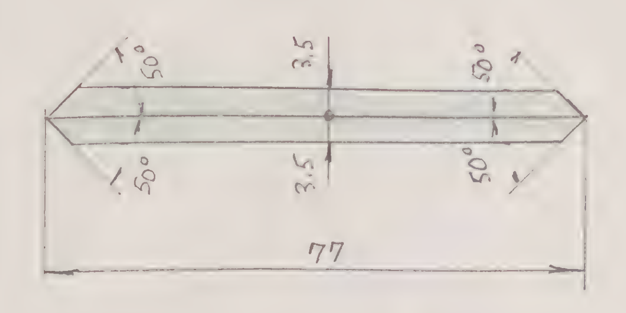


Figura 2

Enero 1979

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4.2

DODECAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita

$r' = 76,1$ mm

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: « Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular convexo, representado en la lámina nº 5 del ejercicio E.E.

DATOS: Radio " r_{ec}^{12} " de la esfera circunscrita al dodecaedro regular pedido.

$$r_{ec}^{12} = 76,1 \text{ m m.}$$

El modelo corpóreo que se estudia es de caras vaciadas, variante del modelo M-4.1, con sus mismas dimensiones y características siguientes:

Número de caras pentagonales	$C_5 = 12$
Número de vértices	$V = 20$
Número de aristas	$A = 30$
Número de caras de cada vértice	$3\ P_5$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 — CARAS SUPERFICIALES — 12 unidades

Son pentágonos regulares convexos, cuyo lado l_5 es igual

UNE A 4-210 x 297



a la arista a_{12} del dodecaedro pedido.

Su valor se obtiene despejando a_{12} de la fórmula nº del ejercicio G. E. , o sea:

$$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} a_{12} \quad \text{de donde:} \quad \boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} =$$

$$= r_{ec}^{12} \times \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \cong 76,1 \times 0,71\ 36\ 44\ 17\ 9... \cong 0,54,30\ 83\ 22\ 02 \cong$$

$$\cong \boxed{54,3 \text{ m m.}}$$

El radio "r_{c-5}" de la circunferencia circunscrita al pentágono de una cara del dodecaedro regular pedido, cuyo lado $l_5 = a_{12}$, será: (ver fórm. 11 del ejercicio G.P. 1,400-44)

$$\boxed{r_{c-5}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\ l_5 \cong 0,85\ 06\ 50\ 80\ 8... \times 54,3 \cong 46,19\ 74\ 18\ 04 \cong \boxed{46,2 \text{ mm}}$$

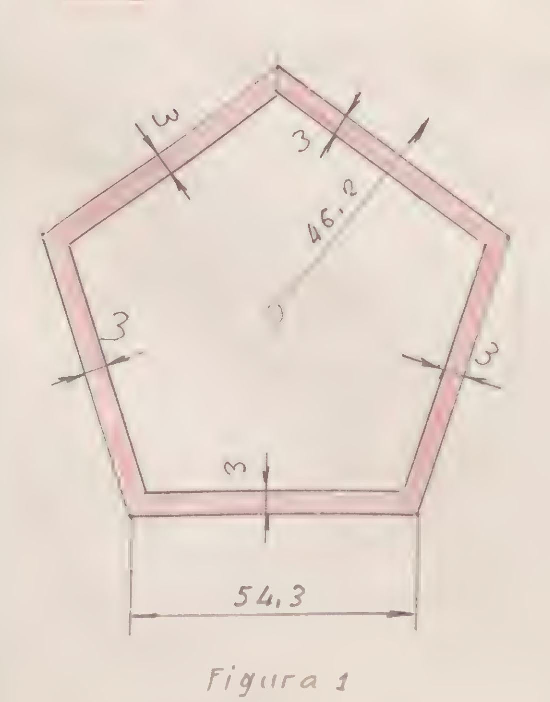


Figura 1

PIEZA Nº 1 12 (U)

Figura 1

UNE A 4-210 x 297

Octubre 1978



Modelo M. 4.2

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_{12} (ver fig. 1; $a_{12} = 54,3$ mm).- La tomamos igual a 53 mm.

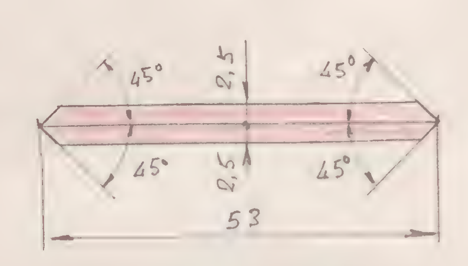


Figura 2

PIEZA Nº 2 30 (U)

Fig. 2

Octubre 1978



PIEZA Nº 1

Fig. 1

12 (u)

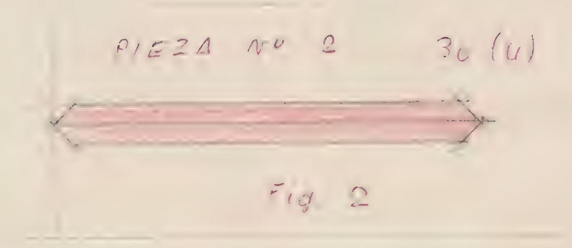


Fig. 2

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO OBTENIDO DEL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO AL CORTAR ÉSTE POR PLANOS QUE PASAN POR LOS EXTEMOS DE LAS TRES ARISTAS QUE CONCURREN EN CADA VÉRTICE DEL MISMO. ——————

Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$r' = 110$ mm.

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo N-1.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo obtenido del dodecaedro regular convexo al cortar éste por planos que pasan por los extremos de las tres aristas que concurren en cada vértice del mismo.

Como consecuencia de la mencionada ley de generación del poliedro que se estudia, cada plano secante corta a cada una de las tres caras pentagonales del dodecaedro regular concurrentes en cada vértice del mismo, según rectas que son diagonales de dichas caras, que a su vez forman triángulos equiláteros (las tres diagonales son iguales)

El poliedro resultante es cóncavo, y está formado por 12 caras que son polígonos estrellados, y 60 caras que son triángulos equiláteros.

Las doce caras poligonales son pentágonos estrellados continuos, de 2ª especie (estudiados en el ejercicio G. P. 1400-62) y las 60 caras son triángulos equiláteros cuyo lado l_3 es igual al lado l_5^{II} de la línea poligonal del contorno del pentágono estrellado y que a su vez es igual a la arista a_{12}^{30} del poliedro estudiado.

Los polígonos estrellados están situados en las caras pentagonales del dodecaedro generador e inscritos en los pentágonos regulares de dichas caras.

Para la construcción de este poliedro son necesarias las siguien-

UNE A4 210 x 297



Las piezas:

Este poliedro es de caras macizas

DATO: Radio "r_{ec}^{12} = 110 mm" de la esfera circunscrita al dodecaedro generada

PIEZA Nº 1 CARAS PENTAGONALES ESTRELLADAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1, y el cálculo de sus longitudes se expone a continuación:

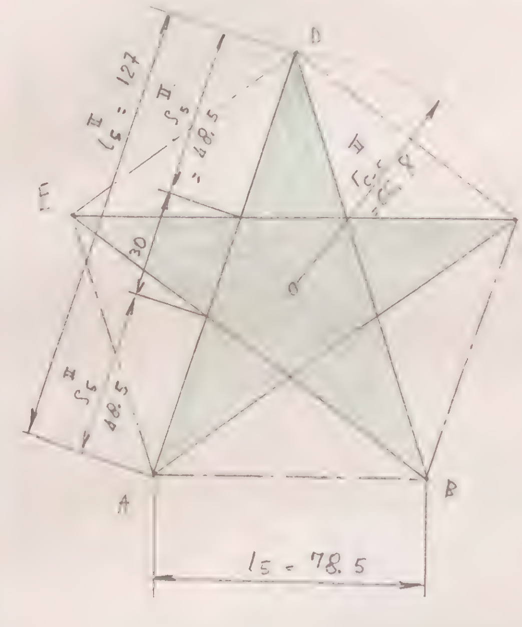


Figura 1

1) Arista "a_{12}" del dodecaedro regular convexo generador (ver modelo M-4.101 h2)

$$a_{12} = l_5 = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{12} \cong$$

$$= 0.71\,36\,44\,17\,9... \times 110 \cong 78.50\,08\,56\,69 \cong$$

$$\cong 78.5 \text{ mm}$$

2) Radio "r_{c-5}^{II}" de la circunferencia circunscrita al pentágono estrellado (ver ejercicio G.P. 1.400-62)

$$r_{c-5}^{II} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times l_5 = 0.85\,06\,50\,80\,8... \times 78.50\,08\,56\,09 \cong 66.77\,68\,1666 \cong$$

$$\cong 66.8 \text{ mm}$$

3) Lado "l_5^{II}" del pentágono estrellado (ver ejerc. G.P. 1.400-62)

$$l_5^{II} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times l_5 \cong 1.61\,80\,33\,98\,9 \times 78.50\,08\,56\,09 \cong 127.01\,70\,53\,3 ... \cong$$

$$\cong 127 \text{ mm}$$

4) Lado "S_5^{II}" de la línea poligonal de contorno (ver ejerc. G.P. 1400-62)

$$S_5^{II} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_5 = 0.61\,80\,33\,98\,9... \times 78.50\,08\,56\,69 \cong 48.51\,61\,97\,23 \cong 48.5 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

Calvare   Marzo 1979



PIEZA Nº 2 CARAS TRIANGULARES 60 unidades

Son triángulos "equiláteros" de lado $l_3 = l_5 = 48.5$ mm (ver fig. 1). Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2.

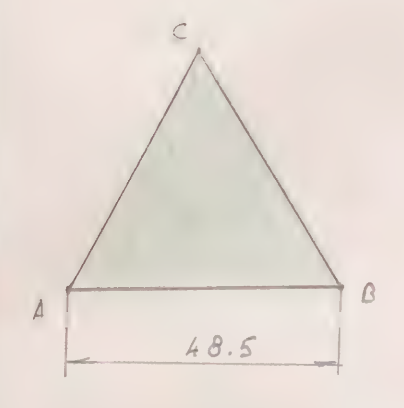


Figura 2

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR EN CARAS PENTAGONALES ESTRELLADAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono estrellado ABCDE de la figura 1, y se detallan en la figura 3

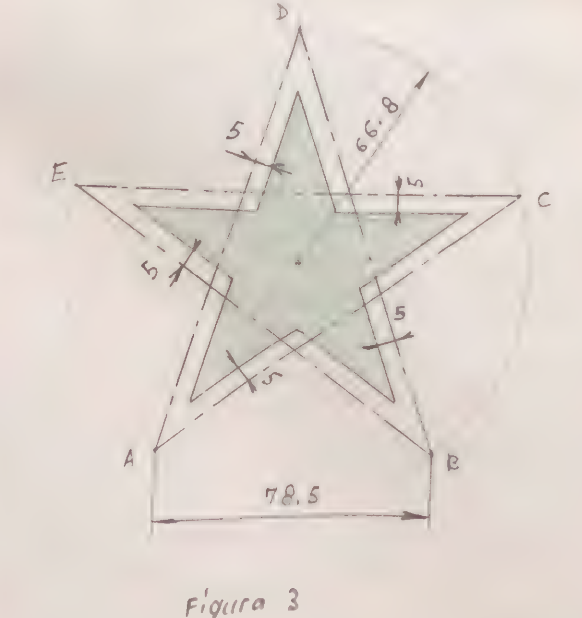


Figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3



Modelo M-4.3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR EN CARAS TRIANGULARES 60 unidades

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 2 y se detallan en la figura 4

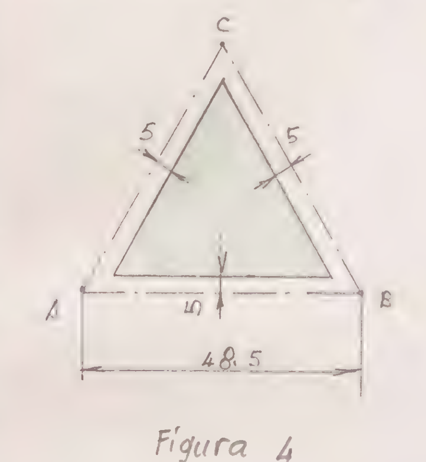


Figura 4

PIEZA Nº 4 60 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 150 unidades (simétricas 2 a 2)

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5

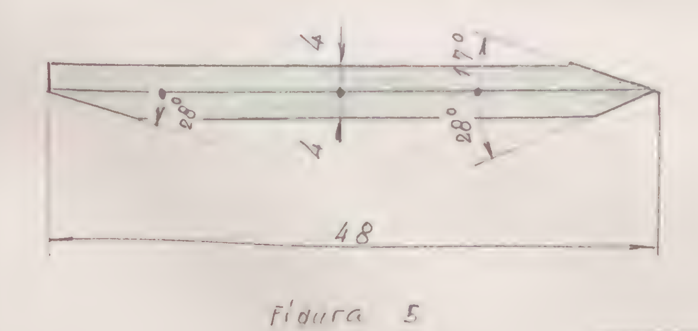


Figura 5

PIEZA Nº 5 150 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES ESTRELLADAS 12 unidades

La forma y dimensiones se deducen de las del pentágono estrellado ABCDE de la figura 1, y se detallan en la figura 6

UNE A4:210 x 297

Marzo 1979



		Modelo M-43

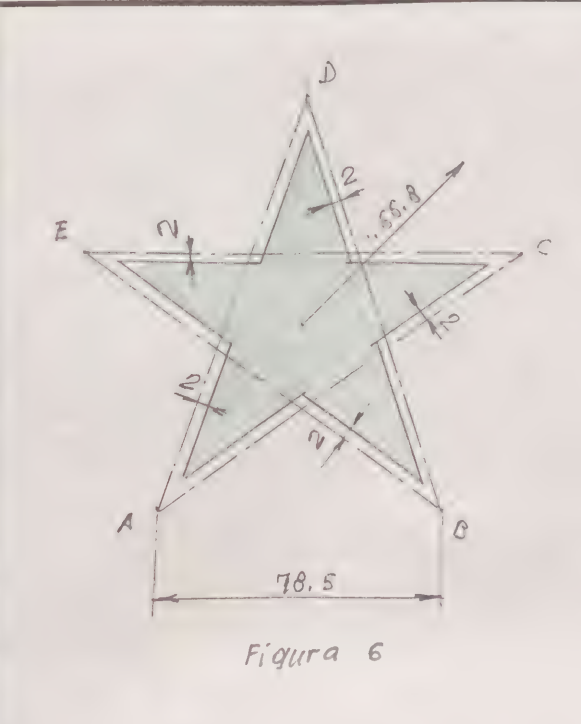


Figura 6

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

60 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de figura 2, y se detallan en la figura 7

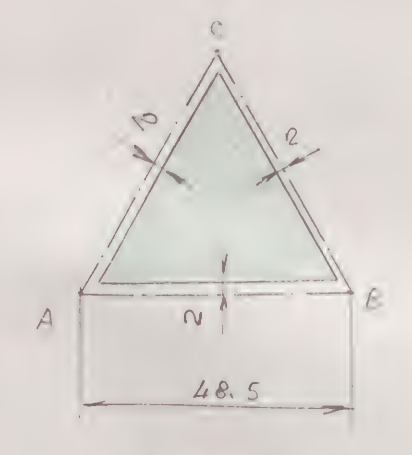


Figura 7

PIEZA Nº 7 60 (u)

Figura 7

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4.4

Variante del modelo M-4.3

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO OBTENIDO DEL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO AL CORTAR ÉSTE POR PLANOS QUE PASAN POR LOS EXTREMOS DE LAS TRES ARISTAS QUE CONCURREN EN CADA VÉRTICE DEL MISMO

Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$r' = 110$ mm

UNE A4 210 x 297

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4.4

Variante del modelo M-4.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo obtenido del dodecaedro regular convexo al cortar éste por planos que pasan por los extremos de las tres aristas que concurren en cada vértice del mismo.

Este modelo tiene las mismas forma y dimensiones que las del modelo M-4.3, con la variante de tener las caras vaciadas en lugar de macizas.

Para la construcción del mismo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS PENTAGONALES ESTRELLADAS

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

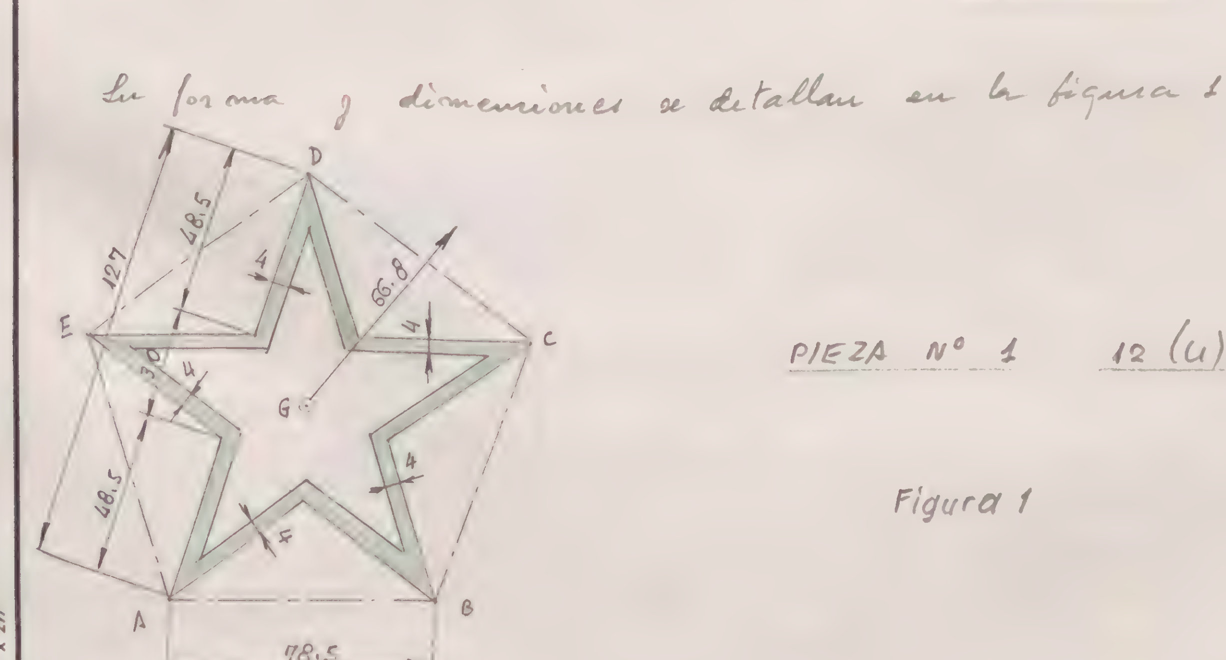


Figura 1

Alvarez Marzo 1979



Modelo M - 4.4

PIEZA Nº 2 CARAS TRIANGULADES 60 Unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

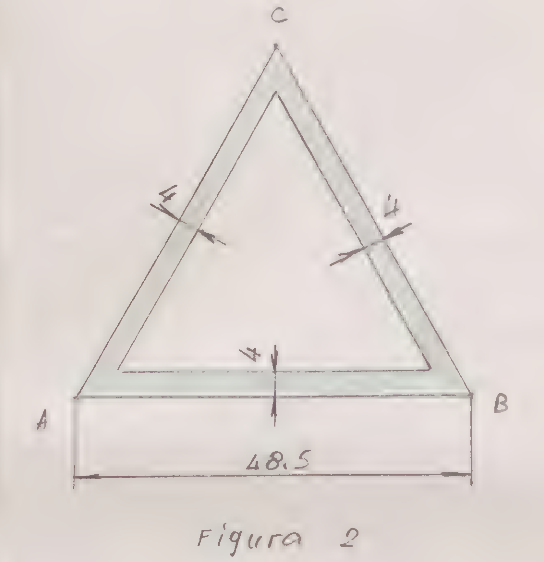


Figura 2

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 150 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

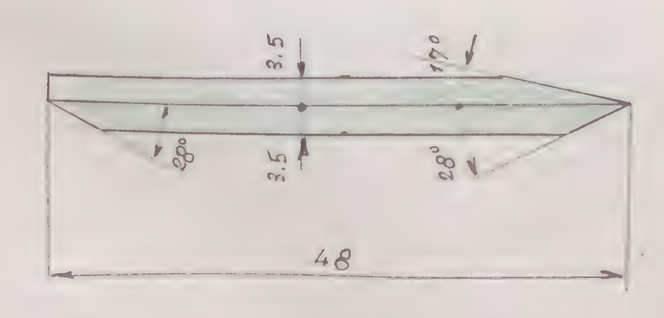


Figura 3

PIEZA Nº 3 150 (u)

Figura 3

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO OBTENIDO AL CONSTRUIR SOBRE CADA CARA DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, UNA PIRÁMIDE ESTRELLADA PENTAÉDRICA CUYAS ARISTAS LATERALES SON IGUALES A LAS DEL DODECAEDRO GENERADOR

Radio de la esfera que pasa por los vértices de las pirámides estrelladas pentaédricas:

$r' = 110$ mm.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4.5

ENUNCIADO: Construir el modelo del poliedro cóncavo obtenido al construir sobre cada cara de un dodecaedro regular convexo, una pirámide cóncava, decaédrica, cuyas aristas exteriores son iguales a las del dodecaedro generador, y las interiores iguales entre sí.

Se tiene como dato único el del radio "r_{ec}^{20}" de la esfera que contiene a los vértices del poliedro, más alejados de su centro "O":

DATO Radio máximo "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita al poliedro pedido

$$r_{ec}^{20} = 110 \quad mm$$

1) PROPIEDADES

De acuerdo con la definición, dada en el enunciado, del poliedro estudiado, éste se compone de doce pirámides iguales, construidas sobre las caras planas de un dodecaedro regular convexo.

Estas pirámides tienen por base un pentágono estrellado de 2ª especie, inscrito en el pentágono regular convexo de cada cara del dodecaedro y de una altura tal que verifique que las aristas exteriores de las caras laterales sean de igual longitud que las de las aristas a_{12} del mencionado dodecaedro regular.

Estas pirámides estrelladas pentaédricas son rectas, por lo que

UNE A4 210 x 297

Alvarez Marzo 1979



		Modelo M - 145

su altura pasa por el centro "O" de la base.

En la figura 1, representamos una de dichas pirámides estrelladas pentaédrica, proyectada ortogonalmente sobre su base.

En está figura, ABCDE es un pentágono regular convexo cuyo lado l_5 es igual a la arista a_{12} del dodecaedro regular generador, por lo que será:

$$l_5 = a_{12} = AB$$

Uniendo los vértices del pentágono de dos en dos, obtendremos el pentágono regular estrellado ACEBDA, continuo de segunda especie. (ver ejercicio G.P. 1.400-43)

Figura 1

En el estudio de este pentágono regular estrellado, realizado en el ejercicio G.P. 1.400-43, se han deducido las siguientes fórmulas

"r^{II}_{c-5}" = Radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de lado a_{12}

Fórmula (1) $$r^{II}_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_1$$

"l^{II}_5" = Lado del pentágono estrellado en función de a_{12}

UNE A4 210 x 297

Marzo 1979



Fórmula (2) $$l_5^{II} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a_{12}$$

"s" = Trozo de la línea poligonal del contorno del pentágono estrellado

Fórmula (3) $$s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, a_{12}$$

"p" = Segmento central del lado l_5^{II}, después de deducidos los dos segmentos "s" del contorno.

Fórmula (4) $$p = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\, a_{12}$$

En el estudio del dodecaedro regular convexo (lám. 4), se han deducido las siguientes fórmulas:

"r_{ec}^{12}". Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador

Fórmula (5) $$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, a_{12}$$

r_{ei}^{12} = Radio de la esfera inscrita al dodecaedro generador

Modelo M-4.5

Fórmula (6) "

$$r_{ei}^{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\; a_{12}$$

Basándonos en las fórmulas anteriores, deducimos las siguientes para el modelo estudiado:

"h" = Altura de las pirámide estrelladas sobre las caras del dodecaedro generador.

Sea (fig. 1) "V" el vértice de la pirámide y "O" el centro de la cara pentagonal ("O" es proyección ortogonal de "V" sobre la cara). Uniendo "V" con "A" se nos formará en el espacio, un triángulo VAO, rectángulo en O, siendo $\overline{VO}$, la altura de la pirámide. Así pues se verificará:

$\overline{VO} = \sqrt{\overline{VA}^2 - \overline{OA}^2}$ en la que $\overline{VO} = h$; $\overline{OA} = r_{c-5}^{II}$ (fórm. 1)

y $\overline{VA}$ = arista lateral de la pirámide = a_{12} (según enunciado)

$$h = \sqrt{a_{12}^2 - (r_{c-5}^{II})^2} = \sqrt{a_{12}^2 - \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12}\right]^2} = \sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; a_{12} = h$$ Fórmula (7)

"r_{ec}^{20}" = Radio máximo de la esfera circunscrita al poliedro pedido

UNE A4 210 x 297

[signature] Marzo 1979



Es la suma de los segmentos r_{ei}^{12} (ver fórmula 6) y de la altura "h" de la pirámide estrellada (ver fórmula 7)

Así pues tendremos:

$$r_{ec}^{20} = r_{ei}^{12} + h = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, a_{12} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, a_{12} =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] a_{12} = \sqrt{\left[\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right]^2}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} + 2 \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5} + 20 - 4\sqrt{5}}{40} + 2 \times \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{400}}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5}}{40} + 2\sqrt{\frac{125 + 55\sqrt{5} - 25\sqrt{5} - 55}{400}}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5}}{40} + 2\sqrt{\frac{70 + 30\sqrt{5}}{400}}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5}}{40} + 2\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{40}}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5}}{40} + \frac{\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5}}{40} + \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{10}}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5}}{40} + \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10}}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5}}{40} + \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{20}}}\, a_{12} =$$



$$= \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5}}{40} + \frac{(3 + \sqrt{5})\sqrt{20}}{20}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5}}{40} + \frac{(3 + \sqrt{5}) \times (2\sqrt{5})}{20}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5}}{40} + \frac{6\sqrt{5} + 10}{20}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{45 + 7\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + 20}{40}}\; a_{12}$$

y finalmente:

Fórmula (8) $$\boxed{r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{65 + 19\sqrt{5}}{40}}\; a_{12}}$$

De la figura 1 se deduce que el segmento $\overline{OF}$ es el radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular convexo FGHIJF de lado "p", por lo que será:

$$\overline{OF} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\; p$$ (ver fórmula 1) siendo $p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} a_{12}$

(ver fórmula 4), por lo que tendremos:

$$\overline{OF} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})^2}{40}}\; a_{12} =$$ Fórmula 8)

$$= \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(9 + 5 - 6\sqrt{5})}{40}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{2 \times (5 + \sqrt{5}) \times (7 - 3\sqrt{5})}{40}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{35 + 7\sqrt{5} - 15\sqrt{5} - 15}{20}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{20 - 8\sqrt{5}}{20}}\; a_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}\; a_{12}}$$

Este valor nos sirve para calcular la longitud de la arista.

UNE A4 210 x 297



$\overline{VF}$, hipotenusa del triángulo rectángulo VOF (fig. 1) de catetos $\overline{VO} = h_{..}$ y $\overline{OF}$, calculados en las fórmulas (7) y (8) respectivamente. Así pues tendremos:

$$\boxed{\overline{VF}} = \sqrt{\overline{VO}^2 + \overline{OF}^2} = \sqrt{\left[\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,a_{12}\right]^2 + \left[\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\,a_{12}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\,a_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}+10-4\sqrt{5}}{10}}\,a_{12} = \sqrt{\frac{15-5\sqrt{5}}{10}}\,a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,a_{12} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\,a_{12} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\,a_{12} = \left[\sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}}\right]a_{12} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right]a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,a_{12}} = S \quad \text{(ver fórmula 3)}$$

El cálculo anterior nos demuestra que el triángulo VFA en el espacio, es isósceles, por tener iguales los lados $\overline{AF} = \overline{VF} = S$ y también igual al triángulo EFA que también tiene $\overline{EF} = \overline{FA} = S$ y el lado $\overline{EA} = \overline{VA} = a_{12}$. Como el triángulo EFA es a su vez una cara del poliedro estudiado, llegamos a la conclusión que éste posee las siguientes propiedades:

1º Es cóncavo

2º Tiene $15 \times 10 = 150$ caras triangulares

3º Tiene $\frac{150 \times 3}{2} = 225$ aristas

4º Todas sus caras son iguales de forma de triángulo isósceles.



Las fórmulas [illegible] y [illegible] nos permite calcular las longitudes de los lados del triángulo isósceles de una cara, pero como están en función de la arista a_{12} del dodecaedro generador, vamos a transformarlas en función del radio máximo "r_{ec}^{20}" dato del ejercicio y radio máximo de la esfera circunscrita al poliedro pedido.

Igualmente transformaremos las fórmulas (6) y (8), correspondientes al dodecaedro generador.

Para ello, despejamos a_{12} de la fórmula (8)

$$r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{65+19\sqrt{5}}{40}}\, a_{12} \qquad \text{y de aquí:}$$

$$a_{12} = \frac{1}{\sqrt{\frac{65+19\sqrt{5}}{40}}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{1}{\frac{65+19\sqrt{5}}{40}}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{40}{65+19\sqrt{5}}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{40\times(65-19\sqrt{5})}{65^2-(19\sqrt{5})^2}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{40\times(65-19\sqrt{5})}{2420}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{2\times(65-19\sqrt{5})}{121}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\times(65-19\sqrt{5})}}{11}\, r_{ec}^{20} \qquad \text{de donde se obtiene finalmente:}$$

"a_{12}" = Arista del dodecaedro generador.

Fórmula (9)

$$\boxed{a_{12} = \frac{\sqrt{2\times(65-19\sqrt{5})}}{11}\, r_{ec}^{20}}$$

UNE A4 210 x 297



Modelo M-45

Sustituyendo el valor de "a_{12}", fórmula (9), en la fórmula (3):

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, a_{12} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{\sqrt{2\times(65-19\sqrt{5})}}{11}\, r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{2\times(65-19\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}}{22}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\times(65-19\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}}{22}\, r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{4\times(65-19\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}{22}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{(65-19\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}{11}\, r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{195-57\sqrt{5}-65\sqrt{5}+95}}{11}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\times(145-61\sqrt{5})}}{11}\, r_{ec}^{20}$$ de donde se obtiene finalmente

"s" = Lado de la línea poligonal del contorno del pentágono estrellado, o arista del poliedro estudiado.

Fórmula (10)

$$s = \frac{\sqrt{2\times(145-61\sqrt{5})}}{11}\, r_{ec}^{20}$$

Sustituyendo el valor de "a_{12}", fórmula (9), en la fórmula (1):

$$r_{c-5}^{II} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{2\times(65-19\sqrt{5})}}{11}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{2\times(65-19\sqrt{5})}{11^2}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(65-19\sqrt{5})}{5\times 11^2}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{325+65\sqrt{5}-95\sqrt{5}-95}{5\times 11^2}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{230-30\sqrt{5}}{5\times 11^2}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{2\times(23-3\sqrt{5})}{11^2}}\, r_{ec}^{20} =$$

UNE A4 210 x 297

[signature] Marzo 1979



$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{23 - 3\sqrt{5}}}{11} \, r_{ec}^{20} = \text{ y siendo } \left\{ \begin{matrix} 23^2 = & 529 \\ (3\sqrt{5})^2 = & -\ 45 \\ & 484 = 22^2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \left[\sqrt{\frac{23+22}{2}} - \sqrt{\frac{23-22}{2}} \right]}{11} \, r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{2} \times \left[\sqrt{\frac{45}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right]}{11} \, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{45} - 1}{11} \, r_{ec}^{20} = \frac{3\sqrt{5} - 1}{11} \, r_{ec}^{20}$$ de donde se obtiene finalmente:

" r_{C-5}^{II} " . Radio de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal del dodecaedro generador

Fórmula (11)

$$r_{C-5}^{II} = \frac{3\sqrt{5} - 1}{11} \, r_{ec}^{20}$$

Sustituyendo el valor de "a_{12}", fórmula (9), en la fórmula (6)

$$r_{oi}^{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} \, a_{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} \times \frac{\sqrt{2 \times (65 - 19\sqrt{5})}}{11} \, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(25 + 11\sqrt{5})(65 - 19\sqrt{5})}{20 \times 11^2}} \, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{1625 + 715\sqrt{5} - 475\sqrt{5} - 1045}{20 \times 11^2}} \, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{580 + 240\sqrt{5}}{20 \times 11^2}} \, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{29 + 12\sqrt{5}}{11^2}} \, r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{29 + 12\sqrt{5}}}{11} \, r_{ec}^{2} =$$

$$= \text{ y siendo } \left\{ \begin{matrix} 29^2 = & 841 \\ (12\sqrt{5})^2 & -\ 720 \\ & 121 = 11^2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sqrt{\frac{29+11}{2}} + \sqrt{\frac{29-11}{2}}}{11} \, r_{ec}^{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{40}{2}} + \sqrt{\frac{18}{2}}}{11} \, r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{20} + \sqrt{9}}{11} \, r_{ec}^{20} = \frac{2\sqrt{5} + 3}{11} \, r_{ec}^{20}$$ de donde se obtiene finalmente:

UNE A4 210 x 297



r_{ei}^{12} = Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generado

Fórmula (12)

$$r_{ei}^{12} = \frac{2\sqrt{5}+3}{11}\, r_{ec}^{20}$$

Las fórmulas (9), (10), (11) y (12) nos permiten calcular las magnitudes necesarias para la construcción de este poliedro cóncavo, siendo el dato del mismo $r_{ec}^{20} = 110$ mm.

Sus valores son los siguientes;

En la fórmula (9)

$$a_{12} = \frac{\sqrt{2(65-19\sqrt{5})}}{11}\, r_{ec}^{20} \cong 0,61\,00\,36\,016\ldots \times 110 \cong 67,10\,39\,61\,79 \cong$$

$$\cong 67.1 \text{ mm.}$$

En la fórmula (10)

$$s = \frac{\sqrt{2\times(145-61\sqrt{5})}}{11}\, r_{ec}^{20} \cong 0,37\,70\,22\,99\,3 \times 110 \cong 41,47\,25\,29\,22\ldots \cong$$

$$\cong 41,5 \text{ mm}$$

En la fórmula (11)

$$r_{c-5}^{II} = \frac{3\sqrt{5}-1}{11}\, r_{ec}^{20} \cong 0.51\,89\,27\,63\,0 \times 110 \cong 57,08\,20\,39\,31 \cong$$

$$\cong 57,1 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

Calvarez Marzo 1979



en la fórmula (12)

$$\boxed{r_{ei}^{12}} = \frac{2\sqrt{5}+3}{11} \cdot r_{ec}^{20} \cong 0.67\ 92\ 85\ 08\ 7 \times 110 \cong 74,72\ 13\ 59\ 95\ 4 \ldots \cong$$

$$\boxed{\cong 74,7 \text{ mm}}$$

2) CONSTRUCCIÓN

Para la construcción de este poliedro se precisan las siguientes piezas:

PIEZA N° 1 CARAS SUPERFICIALES 150 unidades

Son triángulos isóceles cuya base es igual a "a_{12} = 67.1 mm" ver fórmula (9), y las longitudes de sus lados iguales "S = 41.5 mm" ver fórmula (10).

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

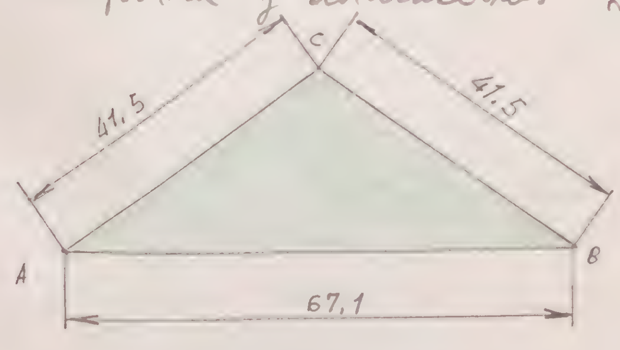


Figura 1

PIEZA N° 1 180 (u)

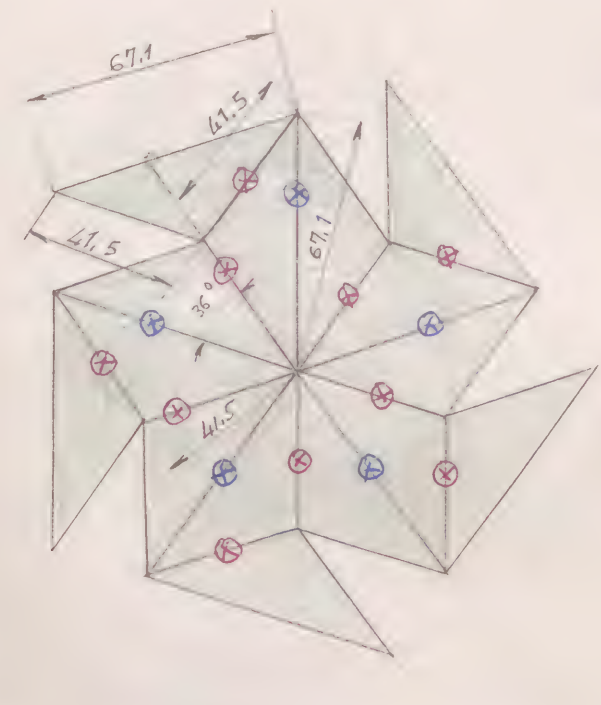
Figura 1

Puede simplificarse la construcción, formando previamente las doce pirámides estrelladas pentaédricas, y acoplándolas a continuación por las aristas del dodecaedro regular convexo generador.



Modelo M-4.5

El desarrollo lateral de estas pirámides estrelladas se obtiene por el acoplamiento de quince de ellas en la forma que se indica en la figura 2.



Doblez hacia arriba del papel

Doblez hacia abajo del papel

Figura 2

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL CARAS SUPERFICIALES

180 unidades

Su forma y dimensiones se deducen del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 3

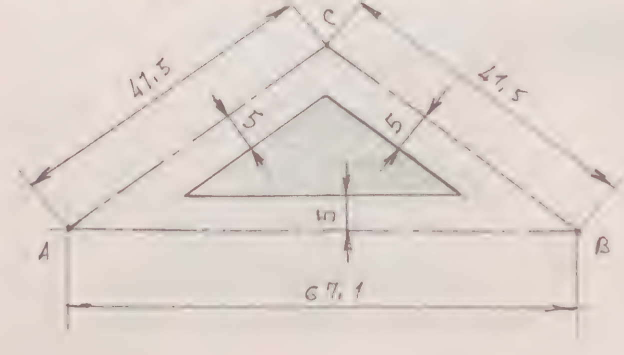


Figura 3

PIEZA Nº 2 180 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

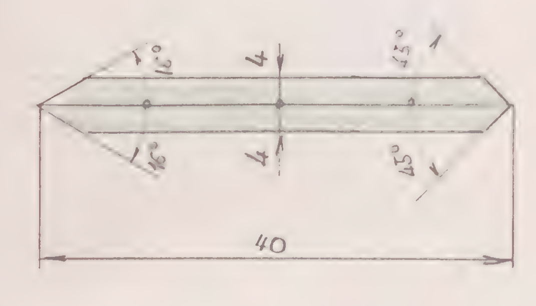
Marzo 1979



Modelo M-4.5

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LADOS IGUALES CARAS SUPERFICIALES 180 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4



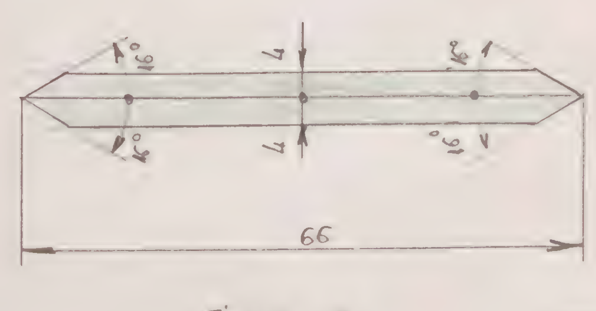
PIEZA Nº 3 180 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LADOS DESIGUALES CARAS SUPERFICIALES 90 (u)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5



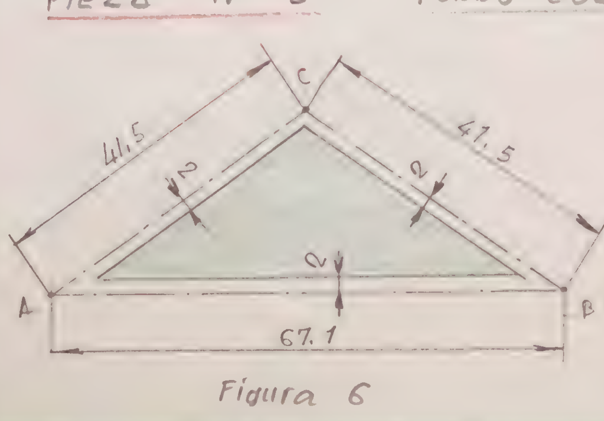
PIEZA Nº 4 90 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 180 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 6



PIEZA Nº 5 180 (u)

Figura 6

Figura 6

UNE A4 210 x 297

Calvarez Marzo 1979



MODELO M- 4.5





Variante del modelo M-4.5

POLIEDRO CÓNCAVO DE IGUALES CARACTERÍSTICAS QUE LAS DEL MODELO M-4.5, PERO CON SUS DOBLECES EN SENTIDO CONTRARIO, EXCEPTO EN LAS ARISTAS DEL DODECAEDRO GENERADOR

Radio de la esfera que pasa por los vértices de las pirámides estrelladas pentaédricas.

$r' = 110$ mm

	Ejecución de construcción de poliedro MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4.6

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo cóncavo, obtenido al construir sobre cada cara de un dodecaedro regular convexo, una pirámide cóncava, dodecaédrica, de igual desarrollo a la del modelo M-4.5, pero en la que los dobleces de sus aristas son de sentido contrario, excepto en las aristas del dodecaedro generador.

Este poliedro puede considerarse como una variante de forma al estudiado en el modelo M-4.5 pues tanto el número de sus caras triangulares (150 u.) y sus dimensiones son iguales a las del mencionado modelo M-4.5. Tan sólo varía en los ángulos de los diedros formados por dos caras adyacentes, ya que al invertir la ejecución de los dobleces respectivos, resultan diferentes (los diedros cóncavos se transforman en convexos y viceversa).

De lo expuesto se deduce la validez del estudio de las dimensiones de este poliedro, realizado en el del mencionado modelo M-4.5.

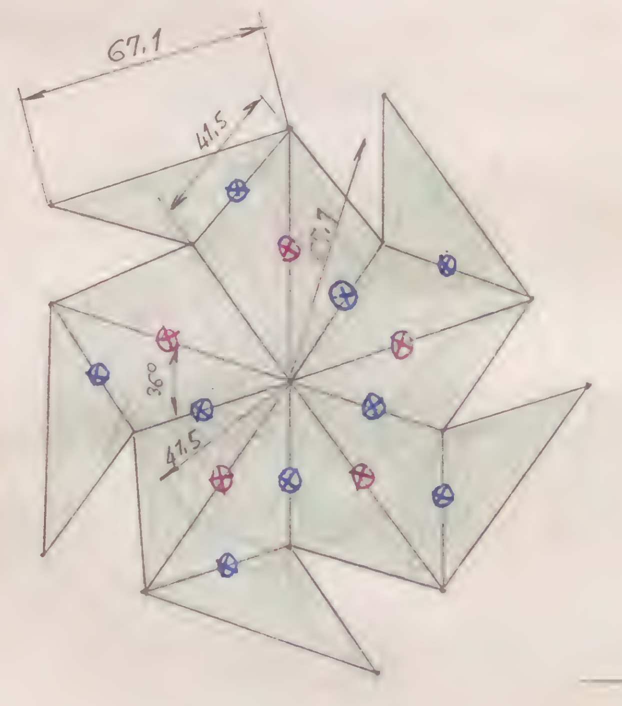
Así pues, para la construcción de este modelo se necesitarán las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES (150 unidades)

De igual forma y dimensiones que las de la pieza nº 1, figura 1, del modelo M - 4.5.

Puede simplificarse la construcción, formando previamente las doce pirámides estrelladas pentaédricas, y acoplándolas a continuación por las aristas del dodecaedro regular con nexo generador.

El desarrollo lateral de estas doce pirámides estrelladas, se obtiene por el acoplamiento de quince caras en cada una ellas, en la forma que se indica en la figura 1.



Ⓧ Doblez hacia arriba del papel

Ⓧ Doblez hacia abajo del papel

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL CARAS SUPERFICIALES

180 unidades

De igual forma y dimensiones que las de la pieza nº 2 figura 3, del modelo M - 4,5



PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LADOS IGUALES CARAS SUPERFICIALES 180 unidades

De igual forma y dimensiones que las de la pieza nº 3, figura 4, del modelo M-4.5

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LADOS DESIGUALES CARAS SUPERFICIALES 90 unidades

De igual forma y dimensiones que las de la pieza nº 4, figura 5, del modelo M-4.5

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 180 unidades

De igual forma y dimensiones que las de la pieza nº 5, figura 6, del modelo M-4.5

UNE A4:210 x 297



MODELO M-4.6

FONDO COLOREADO

MODELO CORPÓREO COMPUESTO DE LOS SIGUIENTES POLIEDROS: A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO; B) EXAEDRO REGULAR CONVEXO INSCRITO EN A); C) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO INSCRITO EN A) Y B). ———

Radio de la esfera circunscrita común:

r' = 110 mm

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4.7

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo compuesto de los siguientes poliedros: A) Dodecaedro regular convexo; B) Icosaedro regular convexo inscrito en A.; C) Tetraedro regular convexo, inscrito en A y B.

DATO:

r_{cc}^{12} = Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro

$$r_{cc}^{12} = 110 \text{ mm}$$

Los poliedros componentes tienen las siguientes características constructivas:

1) Dodecaedro regular convexo, de caras vaciadas

2) Icosaedro regular convexo, de caras vaciadas

3) Tetraedro regular convexo, de caras macizas

Para la construcción de los mismos, se precisan las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M - 4,102

Calvarez Marzo 1979



PIEZA Nº 1 · CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M-4.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M-4.102

B) EXAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-2.102

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M-2.102

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M-2.102

C) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-1.101

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M-1.101

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL INTERIOR 4 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M-1.101

UNE A4 210 x 297

Marzo 1979

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 12 unidades

Igual a la pieza nº 3 del modelo M-1.101

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Igual a la pieza nº 4 del modelo M-1.101

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 5 del modelo M-1.101

[signature] Marzo 1979

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 4.8

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo compuesto de los siguientes poliedros: A) Dodecaedro regular convexo; B) Exaedro regular ~~convexo~~, y C) Componentes del modelo M-19.2 (un octaedro regular convexo y dos tetraedros regulares convexos).

Los poliedros componentes de este modelo, tienen las siguientes características constructivas:

A) Dodecaedro regular convexo, de caras vaciadas.

B) Exaedro regular convexo, de caras vaciadas

C) Componentes del modelo M-19.2:

C1) Octaedro regular convexo, de caras macizas

C2) Dos tetraedros regulares convexos, de caras vaciadas

Los poliedros B) y C2), están inscritos en el A), siendo el radio de sus esferas circunscritas iguales ($r_{ec}^{4} = r_{ec}^{6} = r_{ec}^{12}$)

Para la construcción de los mismos, se precisan las siguientes piezas:

DATO: $r_{ec}^{4} = r_{ec}^{6} = r_{ec}^{12} = 110$ mm

A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-4.102

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M-4.102

UNE A4 210 x 297

Alvarez Marzo 1979

Modelo M-4.8

PIEZA Nº 2" UNIONES ARISTAS 30 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M-4.102

B) EXAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-2.102

PIEZA Nº3 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M-2.102

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M-2.102

---

c) COMPONENTES DEL MODELO M-19.2

C1) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS, SÓLIDO COMUN DE LOS DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS POR SUS ARISTAS.

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-19.2

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M-19.2

UNE A4 210 x 297

Alvarez Marzo 1979

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M- 19.2

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 16 unidades

Igual a la pieza nº 3 del modelo M- 19.2

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Igual a la pieza nº 4 del modelo M - 19.2

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO 8 unidades

Igual a la pieza nº 5 del modelo M - 19.2

---

c2) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS, EN EL CUAL ESTÁ UBICADO EL OCTAEDRO C1

De igual forma y dimensiones que las del modelo M - 1.102

PIEZA Nº 10 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 1 del modelo M - 1.102

UNE A4 210 x 297

[signature] Marzo 1979



PIEZA Nº 11 .. UNIONES ARISTAS 6 unidades

Igual a la pieza nº 2 del modelo M - 1.102

C3) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS, CONJUGADO POR SUS ARISTAS CON EL TETRAEDRO C2, Y FORMADO POR CUATRO TETRAEDROS REGULARES DE CARAS VACIADAS, Y ARISTA $a_4 = a_8$

PIEZA Nº 12 DESARROLLO DE LAS TRES CARAS LATERALES EN CADA VÉRTICE 4 unidades

Iguales a la pieza nº 5 (fig. 3) del modelo M - 19.1

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a la pieza nº 6 (fig. 4) del modelo M - 19.1

UNE A4 210 x 297



MODELO CORPÓREO COMPUESTO DE LOS SIGUIENTES POLIEDROS: A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, Y B) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO INSCRITO EN EL DODECAEDRO A).

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76,1$ mm

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M. 4.9

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo compuesto de los siguientes poliedros: A) Dodecaedro regular convexo y B) Tetraedro regular convexo, inscrito en el dodecaedro A.

Uniendo, de forma adecuada, cada vértice de un dodecaedro regular convexo, con otros tres del mismo, los segmentos rectilíneos obtenidos, son aristas de un tetraedro regular convexo, que estará inscrito en el dodecaedro. Los centros del dodecaedro y tetraedro regulares, son coincidentes, y la esfera circunscrita a uno de ellos es también coincidente con la del otro.

Esta propiedad es la que se pone de manifiesto en este modelo M- 4.9

Por el proceso expuesto anteriormente, en todo dodecaedro regular convexo pueden inscribirse hasta 10 tetraedros distintos; los cuales son conjugados por sus aristas, dos a dos.

La características constructivas de los dos poliedros que forman este modelo, son las siguientes:

1) Dodecaedro regular convexo, de caras vaciadas.

2) Tetraedro regular convexo, de caras macizas

DATO: Radio "r_{ec}^{12}" de la esfera circunscrita común:

$$r_{ec}^{4} = r_{ec}^{12} = 76.1 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Marzo 1979

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-4.2

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Igual a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-4.2

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M-4.2

B) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-1.1

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-1.1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 4 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M-1.1

UNE A4 210 x 297



Modelo M - 4.9

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 12 unidades

Igual a la pieza nº 3 (fig. 3) del modelo M - 1.1

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Igual a la pieza nº 4 (fig. 4) del modelo M - 1.1

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO 4 unidades

Igual a la pieza nº 5 (fig. 5) del modelo M - 1.1

UNE A4 210 x 297

Marzo 1979

MODELO CORPÓREO COMPUESTO DE LOS SIGUIENTES POLIEDROS: A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, Y B) EXAEDRO REGULAR CONVEXO, INSCRITO EN EL DODECAEDRO A).

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ m m.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 4.10

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo compuesto de los siguientes poliedros: A) Dodecaedro regular convexo y B) Exaedro regular convexo, inscrito en el dodecaedro A.

Uniendo, de forma adecuada, tres vértices de un dodecaedro regular convexo, con otros tres del mismo, de forma que los seis segmentos rectilíneos que los unen sean diagonales de las caras de dicho dodecaedro, se puede obtener un exaedro regular convexo, cuyas aristas sean las seis diagonales mencionadas, y el exaedro estará inscrito en el dodecaedro. Los centros del dodecaedro y exaedro regulares, son coincidentes, y la esfera circunscrita a uno de ellos, es también coincidente con la del otro.

Esta propiedad es la que se pone de manifiesto en este modelo M - 4.10

Por el proceso expuesto anteriormente, en todo dodecaedro regular convexo pueden obtenerse hasta cinco exaedros distintos, inscritos en el mencionado dodecaedro

Las características constructivas de los dos poliedros que forman este modelo, son las siguientes:

1) Dodecaedro regular convexo, de caras vaciadas, y

2) Exaedro regular convexo, de caras macizas.

[signature] Marzo 1979



DATO: r_{ec}^{12} = Radio de la esfera circunscrita común:

$$r_{ec}^{6} = r_{ec}^{12} = 76.1 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-4.2

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Igual a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-4.2

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M-4.2

B) EXAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-2.1

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Igual a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-2.1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 6 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M-2.1

UNE A4 210 x 297

[signature] Marzo 1979



PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 24 unidades

Igual a la pieza nº3 (fig. 3) del modelo M- 2.1

PIEZA Nº6 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Igual a la pieza nº 4 (fig. 4) del modelo M - 2.1

PIEZA Nº7 FORRO COLOREADO 6 unidades

Igual a la pieza nº5 (fig. 5) del modelo M- 2.1

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4.11

MODELO CORPÓREO COMPUESTO DE LOS SIGUIENTES POLIEDROS: A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, Y B) DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, COMPONENTES DEL MODELO M-12.1, INSCRITOS EN A). ———

Radio de la esfera circunscrita

$r' = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 4.11

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo compuesto de los siguientes poliedros: A) Dodecaedro regular convexo y B) Dos tetraedros regulares convexos, componentes del modelo M - 12.1, inscritos en A.

En el estudio del modelo M- 4.10, vimos que el exaedro regular convexo es inscriptible en el dodecaedro regular convexo. Por otra parte, en el modelo M- 1.4, también vimos que el tetraedro regular convexo, (y su conjugado por sus aristas), son a su vez inscriptibles en el exaedro regular convexo. Como consecuencia de lo expuesto, se deduce que "dos tetraedros regulares convexos, conjugados por sus aristas, pueden ser inscritos en el dodecaedro regular convexo"

Esta propiedad es la que se pone de manifiesto en el presente modelo M- 4.11.

Las características constructivas de los tres poliedros que forman este modelo, son las siguientes:

1) Dodecaedro regular convexo, de caras vaciadas, y

2) Dos tetraedros regulares convexos, conjugados por sus aristas, de caras macizas

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Abril - 1979



DATO: r_{cc}^{12} = " Radio de la esfera circunscrita común.

$$r_{cc}^{12} = r_{cc}^{4} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M-4.102

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Igual a la pieza nº 1, (fig. 1) del modelo M - 4.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M - 4.102

B) DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, DE CARAS MACIZAS

De igual forma y dimensiones que las del modelo M- 12.1

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M - 12.1



Modelo M - 4.11

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES

4 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M - 12.1

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES

12 unidades

Igual a la pieza nº 3 (fig. 3) del modelo M - 12.1

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Igual a la pieza nº 4 (fig. 4) del modelo M - 12.1

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO EN ZONAS VISTAS DE LAS CARAS LATERALES Y PIRÁMIDES APARENTES

24 unidades

Igual a la pieza nº 5 (fig. 5) del modelo M - 12.1

PIEZA Nº 8 . CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES

12 unidades

Igual a la pieza nº 6 (fig. 6) del modelo M - 12.1

UNE A4 210 x 297

[signature] Abril 1979



PIEZA Nº 9 „REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 12 unidades

Igual a la pieza nº 7 (fig. 7) del modelo M-12.1

PIEZA Nº 10 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 24 unidades

Igual a la pieza nº 8 (fig. 8) del modelo M-12.1

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 24 unidades

Igual a la pieza nº 9 (fig. 9) del modelo M-12.1

EN PROYECTO

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS MACIZAS OBTENIDO AL CONSTRUIR SOBRE CADA CARA DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, UNA PIRÁMIDE RECTA CUYA BASE ES DICHA CARA Y SUS CARAS LATERALES SON TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS.—

Radio de la esfera que pasa por los vértices de las pirámides rectas pentagonales

$r' = 180$ mm

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo obtenido al construir sobre cada cara de un dodecaedro regular convexo, una pirámide recta cuya base es dicha cara y sus caras laterales son triángulos equiláteros.

Se tiene como dato único el del radio "r_{0c}^{20}" de la esfera que contiene a los vértices de las pirámides rectas, o esfera circunscrita al poliedro.

DATO: Radio máximo "r_{0c}^{20}" de la esfera circunscrita al poliedro pedido:

$$r_{0c}^{20} = 110 \text{ mm}$$

1) PROPIEDADES

De acuerdo con la definición de la generación del poliedro estudiado, dada en el enunciado, vamos a enunciar las propiedades más importantes del mismo, algunas de las cuales son básicas para el cálculo de sus dimensiones.

p1) El poliedro se compone de doce pirámides rectas pentagonales cuya base es un pentágono regular, cara del dodecaedro generador y sus caras laterales son triángulos equiláteros; estas pirámides tienen las aristas de sus bases, comunes

UNE A4 210 x 297



dos a dos.

P 2) El número de caras C es de $12 \times 5 = \underline{60}$ (u)

El número de vértices V es de: $\underline{12}$ en los vértices de las pirámides, y

$\underline{20}$ en los vértices del dodecaedro generador.

en total 32 vértices

Total 32 (u)

El número de aristas A es de:

en las caras laterales de las pirámides $= 5 \times 12 = 60$

en las bases de las mismas $= \frac{5 \times 12}{2} = \underline{30}$

Total 90 (u)

en resumen este poliedro tiene: C = 60 caras

V = 32 vértices

A = 60 + 30 = 90 aristas

verificándose el teorema de Euler

$$C + V = A + 2 \qquad 60 + 32 = 90 + 2$$

P 3) El radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita, es igual a la suma del radio r_{ei}^{12} de la esfera inscrita al dodecaedro generador de arista a_{12} y de la altura h_5 de la pirámide pentagonal recta.

$$r_{ec}^{20} = r_{ei}^{12} + h_5 \qquad (1)$$

P 4) La altura h_5 de la pirámide pentagonal recta, es un cateto de un triángulo rectángulo, que tiene por hipotenusa la arista a_{12} (igual al lado de las caras triangu-



caras equiláteras), y por otro cateto el radio r_{c-5} de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de las caras del dodecaedro generador, por lo que será:

$$h_5 = \sqrt{(a_{12})^2 - (r_{c-5})^2} \qquad (2)$$

P 5) Todas las caras de este poliedro son iguales, en forma de triángulos equiláteros de lado l_3 igual a la arista a_{12} del dodecaedro generador.

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, vamos a hacer uso de ellas para aplicarlas al cálculo analítico de las magnitudes lineales, necesarias para la construcción del poliedro estudiado.

Como fórmulas previas, deducidas en otros ejercicios, recordamos las siguientes:

1º "r_{c-5}" = Radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de lado a_{12} (arista del dodecaedro generador).

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12} \qquad (3)$$

Ver ejercicio G.P. 1.400 - 44

2º "r_{ei}^{12}" = Radio de la esfera inscrita al dodecaedro generador



$$r_{ei}^{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\ a_{12} \qquad (4)$$

Ver ejercicio G. E. (?) Lámina 4

Calculemos a continuación las siguientes magnitudes

3° "h_5" = Altura de la pirámide pentagonal recta

Se obtiene sustituyendo en la fórmula (2) el valor de r_{c-5} de la fórmula (3)

$$h_5 = \sqrt{(a_{12})^2 - (r_{c-5})^2} = \sqrt{(a_{12})^2 - \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ a_{12}\right]^2} = \sqrt{(a_{12})^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}(a_{12})^2} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times a_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ a_{12} \qquad (5)$$

4° "r_{ec}^{20}" = Radio de la esfera circunscrita al poliedro estudiado que pasa por los vértices de las pirámides rectas pentagonales

Se obtiene sustituyendo en la fórmula (1) los valores de las (4) y (5).

$$r_{ec}^{20} = r_{ei}^{12} + h_5 = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\ a_{12} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ a_{12} =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] a_{12} = \sqrt{\left[\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right]^2} \times a_{12} =$$

UNE A4 210 x 297

$$= \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} + 2\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}+20-4\sqrt{5}}{40} + 2\times\sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{400}}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{45+7\sqrt{5}}{40} + 2\times\sqrt{\frac{125+55\sqrt{5}-25\sqrt{5}-55}{400}}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{45+7\sqrt{5}}{40} + 2\sqrt{\frac{70+30\sqrt{5}}{400}}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{45+7\sqrt{5}}{40} + 2\times\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{40}}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{45+7\sqrt{5}}{40} + \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}}\; a_{12} = \left(\text{y siendo } 7^2-(3\sqrt{5})^2 = 49-45 = 4 = 2^2\right).$$

$$= \sqrt{\frac{45+7\sqrt{5}}{40} + \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{10}}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{45+7\sqrt{5}}{40} + \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10}}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{45+7\sqrt{5}}{40} + \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{20}}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{45+7\sqrt{5}}{40} + \frac{(3+\sqrt{5})(2\sqrt{5})}{20}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{45+7\sqrt{5}}{40} + \frac{6\sqrt{5}+10}{20}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{45+7\sqrt{5}+12\sqrt{5}+20}{40}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{65+19\sqrt{5}}{40}}\; a_{12} =$$ de donde se obtiene finalmente:

$$r_{cc}^{20} = \sqrt{\frac{65+19\sqrt{5}}{40}}\; a_{12} \qquad (6)$$

Esta fórmula nos permite calcular la arista del poliedro estudiado, en función del radio de su esfera circunscrita.

[signature] Junio 1979

Así siendo el dato de este modelo el radio $r_{ec}^{20} = 110$ mm de la esfera circunscrita al mismo, que contiene los vértices de las pirámides rectas pentagonales, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros de arista "a_{12}", vamos a deducir de la fórmula (6) el valor de "a_{12}" en función de r_{ec}^{20}; para ello, despejando "a_{12}", tendremos:

$$a_{12} = 1 : \sqrt{\frac{65 + 19\sqrt{5}}{40}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{1 : \frac{65 + 19\sqrt{5}}{40}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{40}{65 + 19\sqrt{5}}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{40 \times (65 - 19\sqrt{5})}{65^2 - (19\sqrt{5})^2}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{40 \times (65 - 19\sqrt{5})}{4225 - 1805}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{40 \times (65 - 19\sqrt{5})}{2420}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{2 \times (65 - 19\sqrt{5})}{121}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{130 - 38\sqrt{5}}{11^2}}\; r_{ec}^{20} =$$

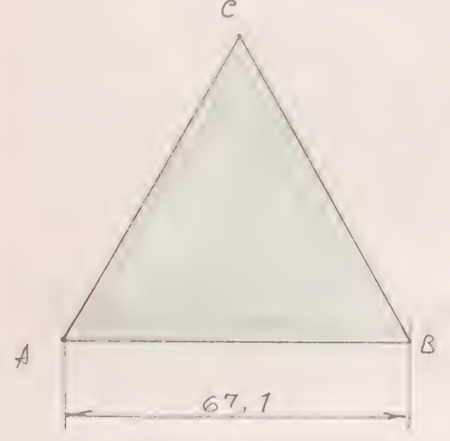
$$= \frac{\sqrt{130 - 38\sqrt{5}}}{11}\; r_{ec}^{20}$$ de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_{12} = \frac{\sqrt{130 - 38\sqrt{5}}}{11}\; r_{ec}^{20}} \qquad (7)$$

Aplicando la fórmula (7), podemos construir el poliedro estudiado en este ejercicio, ya que sus sesenta caras laterales son triángulos equiláteros iguales cuyo lado l_3 es conocido por ser $l_3 = a_{12}$

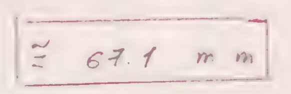


Por consiguiente, dicho modelo se obtendrá acoplando convenientemente las sesenta caras triangulares, cuyas dimensiones se detallan en la figura 1. - La longitud de su lado, será pues



$$\boxed{l_3} = AB = BC = CA = a_{12} = \frac{\sqrt{130 - 38\sqrt{5}}}{11}\, r_{ec}^{20} \cong$$

$$\cong 0{,}61\,00\,36\,01\,6 \times 110 \cong 67{,}10\,39\,61\,78 =$$



$$\boxed{\cong 67.1 \ \text{mm}}$$

Figura 1

Puede simplificarse la construcción, formando previamente las doce pirámides pentagonales, cuyo desarrollo se detalla en la figura 2, y acoplándolas posteriormente por las aristas de sus bases.

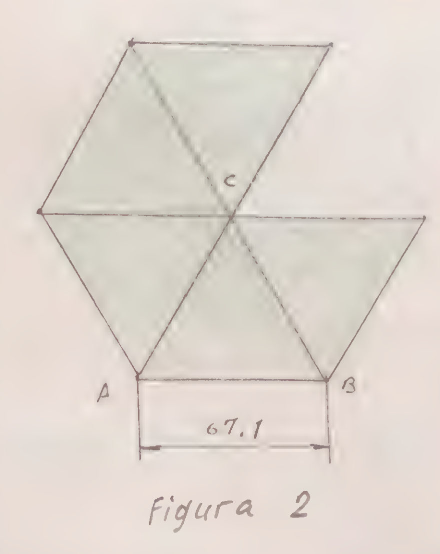


Figura 2

La construcción de este poliedro, partiendo de una sola cara repetida 60 veces (fig. 1) o de la construcción previa de sus doce pirámides pentagonales (fig. 2), presenta dificultades en el acoplamiento de las aristas correspondientes al dodecaedro regular convexo, por ser cóncavo el diedro formado en dichas aristas por dos caras adyacentes, que son a su vez de caras macizas.

Esta dificultad desaparece si construimos previamente el poliedro con sus caras vaciadas y forramos posteriormente con

Junio 1979

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-4.12

caras macizas triangulares cada una de ellas. Así pues, procederemos a su constucción, mediante el acoplamiento de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO LATERAL DE LAS DOCE PIRÁMIDES RECTAS PENTAGONALES 12 unidades

Están compuesta cada una de ellas de cinco triángulos equiláteros iguales. Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

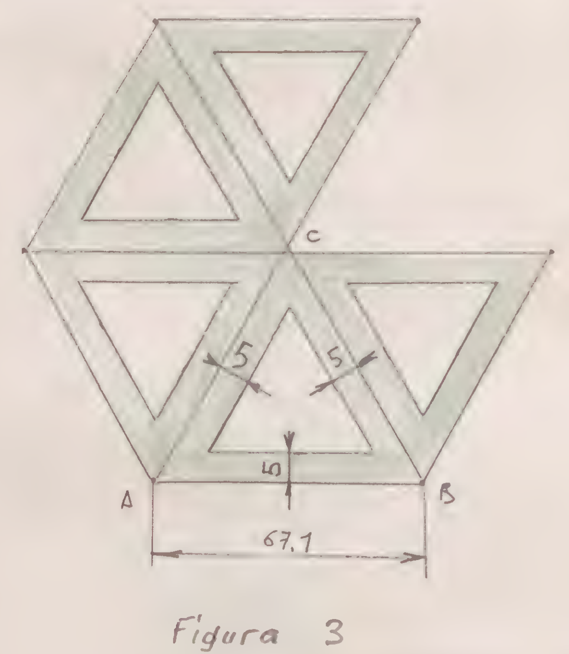


Figura 3

PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 90 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

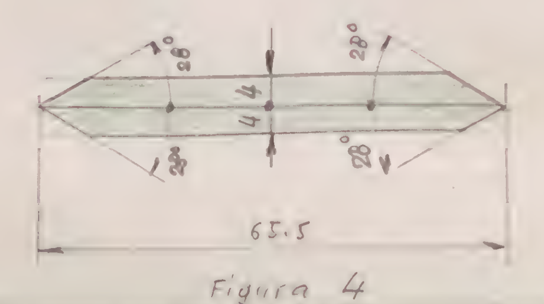


Figura 4

PIEZA Nº 2 90 (u)

Figura 4

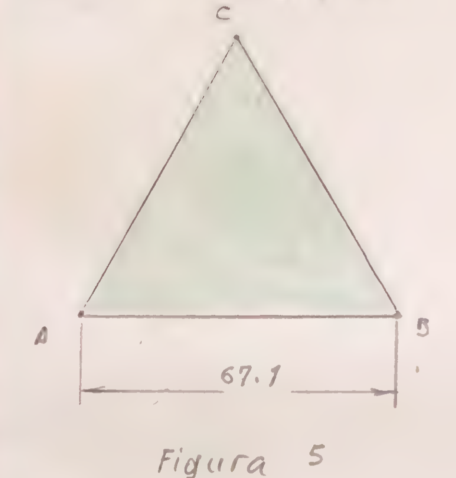


Modelo M-4.12

PIEZA Nº 3 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES

60 unidades

Son triángulos equiláteros. Su forma y dimensiones se representan en la figura 5.



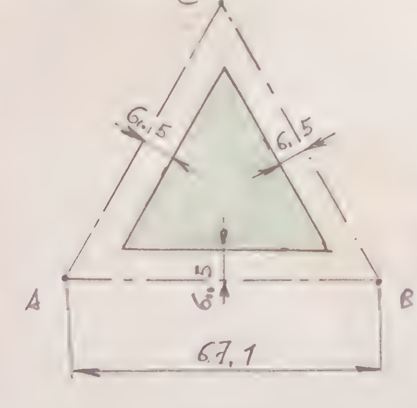
PIEZA Nº 3 60 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 4 REFUERZO CARAS LATERALES 60 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 6, y se deducen de las del Triángulo ABC de la figura 5



PIEZA Nº 4 60 (U)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

60 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 7, y se deducen de las del Triángulo ABC, de la figura 5.

Calvarre Junio 1979

Modelo M - 4.12

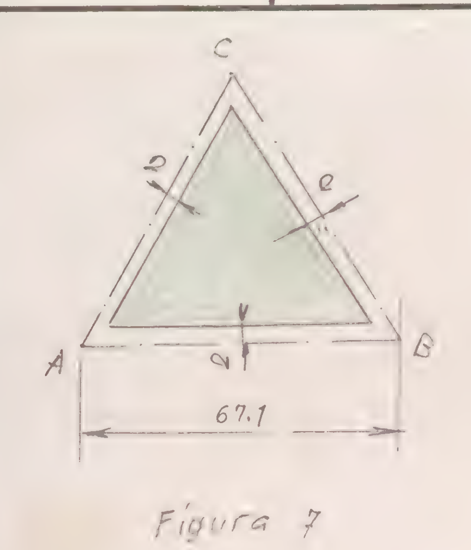


Figura 7

PIEZA Nº 5   60 (u)

Figura 7

Junio 1979



MODELO M - 4.12

PIEZA Nº1

Fig 3

15 (11)

PIEZA Nº 5

Fig 7

60 (11)

MODELO CORPÓREO EN EL QUE SE PONE DE MANIFIESTO QUE EL POLIEDRO CÓNCAVO DEL MODELO M-4.12 ES INSCRIPTIBLE EN EL ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO.- ESTE MODELO SE COMPONE DE LOS SIGUIENTES POLIEDROS: A) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS, Y B) POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS MACIZAS, MODELO M-4.12

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro exterior:

$r' = 110$ mm

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4.13

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo en el que se pone de manifiesto que el poliedro cóncavo estudiado en el modelo M-4.12 es inscriptible en el icosaedro regular convexo que resulta al unir los vértices de las pirámides rectas pentagonales construidas sobre las caras de un dodecaedro regular convexo.

En efecto: Del estudio del modelo M-4.12, se deduce que los vértices de las pirámides rectas pentagonales, construidas sobre las caras de un dodecaedro regular convexo, de caras laterales iguales y de forma de triángulos equiláteros, están equidistantes del centro del dodecaedro, por ser constante la suma $r_{ec}^{20} = r_{ei}^{12} + h_5$ [ver propiedad P3) y fórmula (1) del ejercicio M-4.12]. Y como al mismo tiempo las proyecciones de los vértices de las pirámides, sobre las caras del dodecaedro generador son coincidentes con los centros de sus caras pentagonales, el poliedro resultante al unir dichos vértices será el conjugado del dodecaedro regular convexo, es decir, un icosaedro regular.

Se tiene como dato único para la construcción de este modelo, el radio "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita al poliedro cóncavo dado estudiado en el modelo M-4.12

$r_{ec}^{20} = 110$ m m

Junio 1979



Así pues, tendremos:

a) Que el poliedro cóncavo interior será igual al estudiado en el modelo M-4.12

b) Que el icosaedro regular exterior en el cual está inscrito el anterior poliedro, es igual al estudiado en un modelo M-5.102.

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

A) POLIEDRO CÓNCAVO INTERIOR

PIEZA Nº1 DESARROLLO LATERAL DE LAS DOCE PIRÁMIDES RECTAS PENTAGONALES 12 unidades

Igual a la pieza nº 1 (fig. 3) del modelo M-4.12

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 90 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig. 4) del modelo M-4.12

PIEZA Nº3 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES 60 unidades

UNE A4 210 x 297

Alvarez Junio 1979



Igual a la pieza nº 3 (fig. 4) del modelo M-4.12

PIEZA Nº 4 REFUERZO CARAS LATERALES 60 unidades

Igual a la pieza nº 4 (fig. 6) del modelo M-4.12

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES 60 unidades

Igual a la pieza nº 5 (fig. 7) del modelo M-4.12

B) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO EXTERIOR

PIEZA Nº 6 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Igual a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-5.102

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M-5.102

NOTA.- Para conseguir una correcta construcción de este modelo, aconsejamos construir previamente el poliedro cóncavo interior, de caras macizas, y posteriormente el icosaedro exterior, cuya arista es ligeramente superior a la teórica, por acumulación de los grue- (longitud teórica de la arista a_{20} del icosaedro, $a_{20} = 115{,}7$ mm)

UNE A4 210 x 297

Álvarez Junio 1979



Modelo M - 4.13

ros del papel y de los del pegamento. Es conveniente, pues, obtener la longitud de la arista del icosaedro regular, como promedio de varias mediciones directas sobre el mencionado poliedro cóncavo interior, previamente construido. Naturalmente habrá de incrementarse en igual proporción la longitud de las uniones de las aristas en la pieza nº 7 de este modelo.

UNE A4 210 x 297

Junio 1979

VARIANTE DEL POLIEDRO CÓNCAVO ESTUDIADO EN EL MODELO M-4.12 DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, Y CONSTRUIDO: A) EL POLIEDRO M-4.12 CON SUS CARAS VACIADAS Y B) EL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera que pasa por los vértices de las pirámides rectas pentagonales

$r' = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 4.14

ENUNCIADO: Construir el poliedro cóncavo, variante del estudiado en el modelo M-4.12, de igual forma y dimensiones, compuesto de: A) El poliedro M-4.12, con sus caras vaciadas, y B) El dodecaedro regular convexo generador de caras macizas.

DATO: Se tiene como dato único para la construcción de este modelo, el radio "r_{oc}^{20}" de la esfera circunscrita al poliedro cóncavo estudiado en el modelo M-4.12

$$r_{oc}^{20} = 110 \text{ mm}$$

En el estudio de dicho modelo, dedujimos la fórmula

(1) $$a_{12} = \frac{\sqrt{130 - 38\sqrt{5}}}{11} r_{oc}^{20}$$

que nos permite calcular la longitud de la arista del poliedro estudiado, que en el caso que nos ocupa es:

$$\boxed{a_{12}} = \frac{\sqrt{130 - 38\sqrt{5}}}{11} r_{oc}^{20} = \frac{\sqrt{130 - 38\sqrt{5}}}{11} \times 110 \cong 0,61\ 00\ 36\ 016 \times 110 \cong$$

$$\cong 67,10\ 39\ 61\ 78 \cong \boxed{67,1 \text{ mm}}$$

A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, GENERADOR DE CARAS MACIZAS.

UNE A4 210 x 297

(signature) Junio 1979



Modelo M-4.14

Para la construcción de este poliedro se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Son pentágonos regulares, cuya forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

El radio "r_{c-5}" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de lado a_{12}, será: (ver ejercicio G.P. 1,400-44)

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{130-38\sqrt{5}}}{11} \times r_{ee}^{ee} \cong 0,85\ 06\ 08\ 08 \times$$

$$\times\ 0,61\ 00\ 36\ 01\ 6 \times 110 \cong 57,07\ 91\ 72\ 67 \cong 57,1\ mm$$

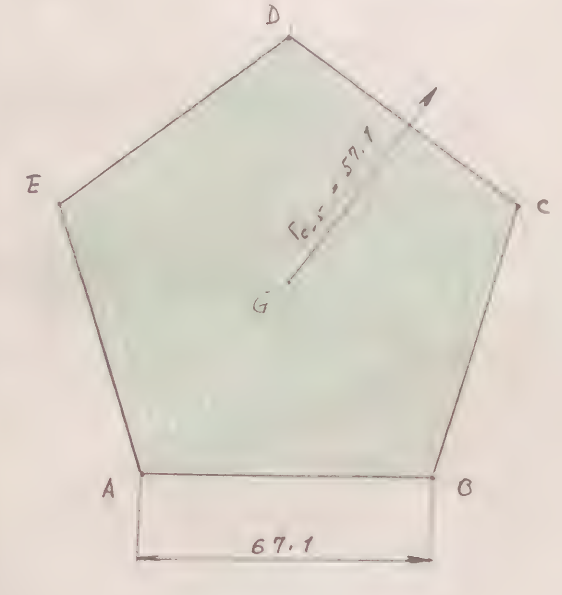


Figura 1

PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono regular ABCDEA de la figura 1, y se detallan en la figura 2

UNE A4 210 x 297

Junio 1979



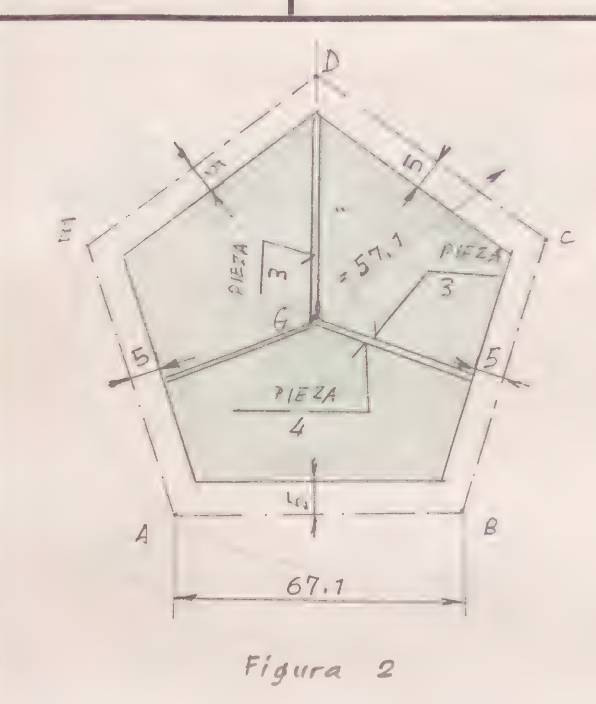


Figura 2

PIEZA N° 2 12 (u)

Figura 2

PIEZA N° 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR

24 unidades (simétricas dos a dos)

Su colocación se detalla en la figura 2 y su forma y dimensiones en la figura 3.

PIEZA N° 3 24 (u)

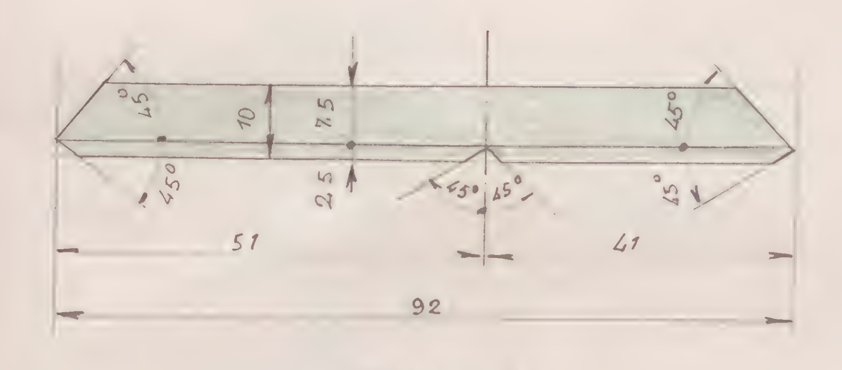


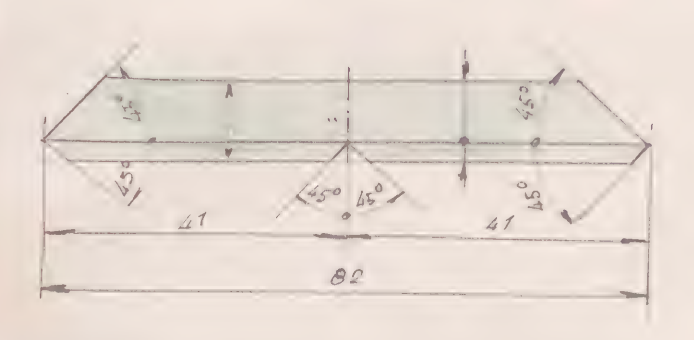
Figura 3

Figura 3

PIEZA N° 4 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 12 unidades

Su colocación se detalla en la figura 2, y su forma y dimensiones en la figura 4.





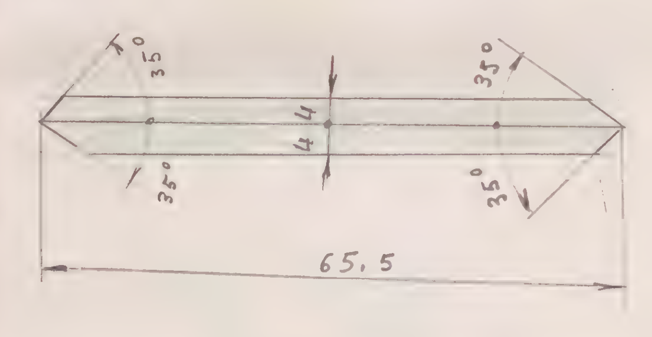
PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 30 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura nº 5



PIEZA Nº 5 30 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO 12 unidades

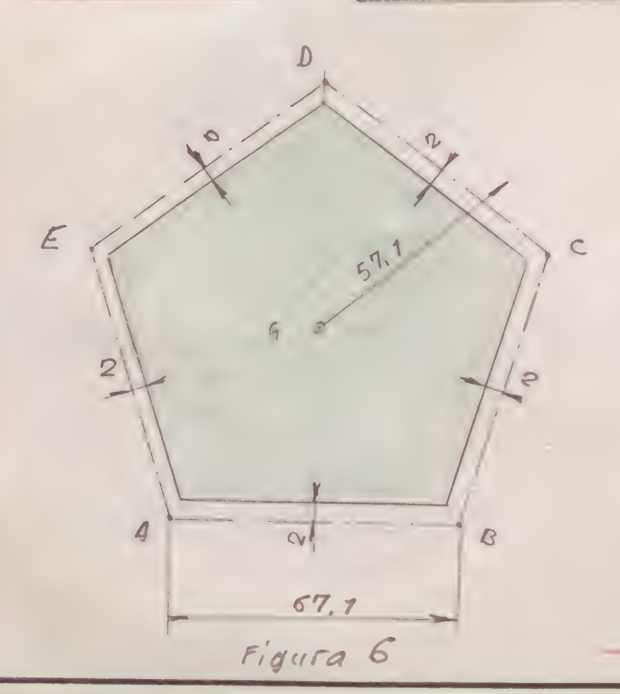


Figura 6

La forma y dimensiones se deducen de las del pentágono regular ABCDEA de la figura 1, y se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 6

Junio 1979



B) POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS VACIADAS, IGUAL AL DEL MODELO M-4.12

Para la construcción de este poliedro se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 7 DESARROLLO LATERAL DE LAS DOCE PIRÁMIDES RECTAS PENTAGONALES 12 unidades

Están compuestas cada una de ellas de cinco triángulos equiláteros iguales. Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7, en la que se ha suprimido los lados del perímetro de su base.

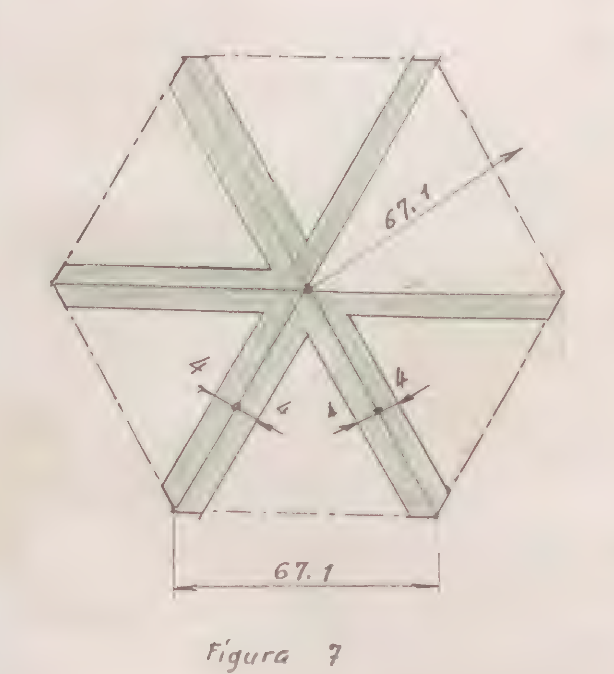


Figura 7

PIEZA Nº 7 12 (U)

Figura 7

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Figura 8

28°
3
4
58°
28°
3
58°
66.5

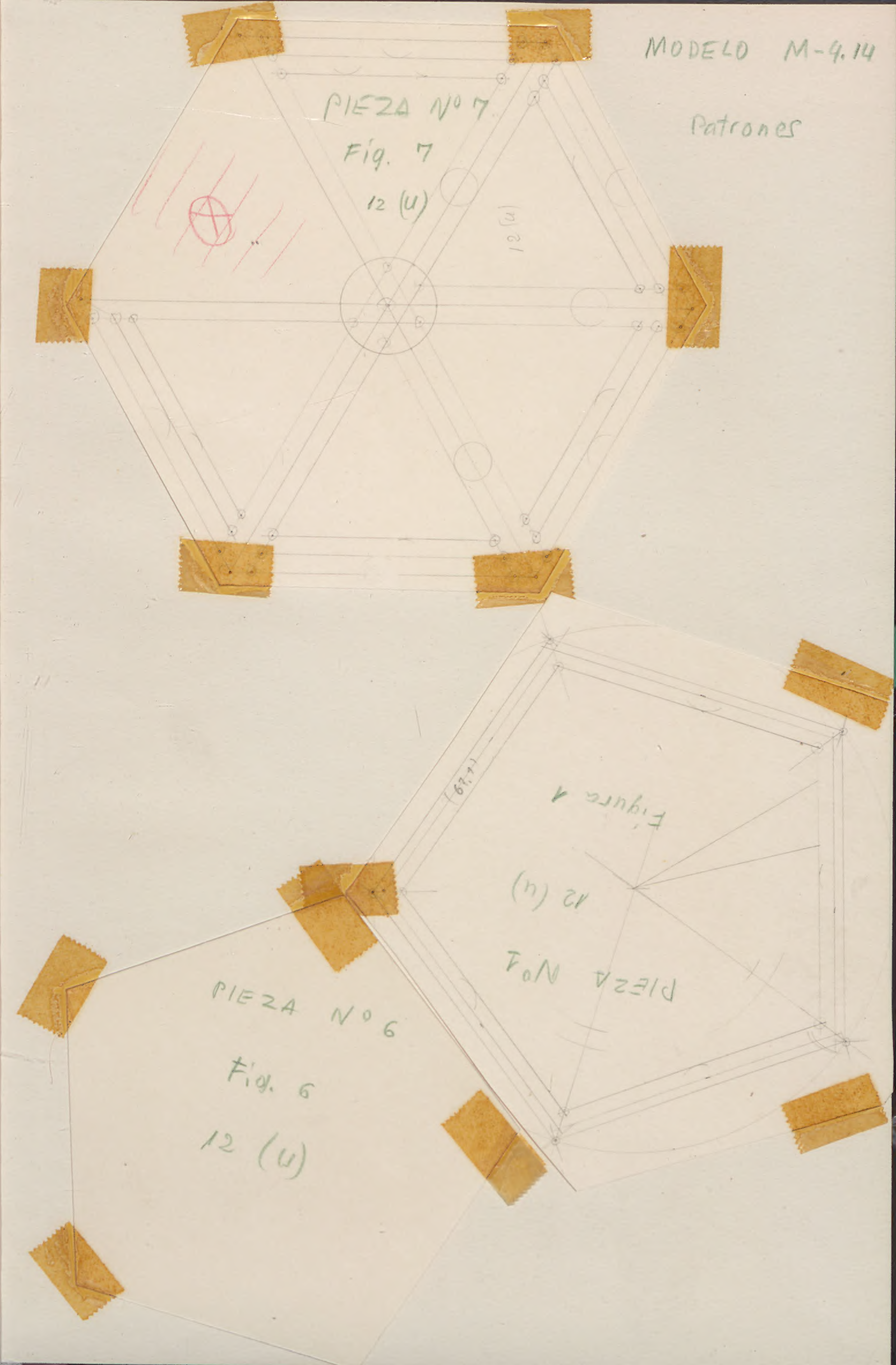
Su forma y dimensiones en la fig. 8

PIEZA Nº 8 60 (U)

Figura 8

UNE A4 210 x 297

Alvarez Junio 1979


MODELO M-4.14
Patrones
PIEZA Nº 7
Fig. 7
12 (u)
12 (u)
PIEZA Nº 6
Fig. 6
12 (u)
(67.1)

colorchecker CLASSIC

mm

calibrite